



INDEC

Instituto Nacional para el Desarrollo Curricular

# Marco Curricular



## Programa de Matemáticas



Estado Libre Asociado de Puerto Rico  
Departamento de Educación



ESTADO LIBRE ASOCIADO DE PUERTO RICO  
Departamento de Educación  
Subsecretaría para Asuntos Académicos  
Secretaría Auxiliar de Servicios Académicos

# MARCO CURRICULAR DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS



Instituto Nacional para el Desarrollo Curricular  
(INDEC)

2003

Derechos reservados  
Conforme a la ley  
Departamento de Educación

### **NOTIFICACIÓN DE POLÍTICA PÚBLICA**

El Departamento de Educación no discrimina por razón de raza, color, género, nacimiento, origen nacional, condición social, ideas políticas o religiosas, edad o impedimento en sus actividades, servicios educativos y oportunidades de empleo.

### **NOTA ACLARATORIA**

Para propósitos de carácter legal en relación con la Ley de Derechos Civiles de 1964, el uso de los términos maestro, director, supervisor, estudiante y cualquier otro que pueda hacer referencia a ambos géneros, incluye tanto al masculino como al femenino.

Arte y Diseño: Publicaciones Puertorriqueñas, Inc.  
Corrección Lingüística: Dra. Carmen Mora • Dr. Antonio Agulló  
Logo INDEC: Diana Príncipe

Producido en Puerto Rico  
Impreso en Colombia • Printed in Colombia

# JUNTA EDITORA

**Dr. César A. Rey Hernández**  
Secretario

**Dra. Carmen A. Collazo Rivera**  
Secretaria Asociada Ejecutiva

**Dr. Pablo S. Rivera Ortiz**  
Subsecretario para Asuntos Académicos

**Sra. Ileana Mattei Látimer**  
Subsecretaria de Administración

**Dra. Myrna Fúster Marrero**  
Directora  
Instituto Nacional para el Desarrollo Curricular

**Dr. José A. Altieri Rosado**  
Secretario Auxiliar de Servicios Académicos

**Prof. Leida Negrón Irizarry**  
Directora  
Programa de Matemáticas

## COLABORADORES

**E**l Marco Curricular del Programa de Matemáticas es producto del esfuerzo y la participación de un equipo de profesionales de la educación. El primer documento se trabajó bajo la dirección del Prof. Waldo Torres y es utilizado como documento base para el diseño de esta primera revisión bajo la dirección de la Prof. Leida Negrón Irizarry conjuntamente con un grupo de asesores, expertos en la materia, supervisores de zona y maestros de matemáticas. El documento se elaboró pasando por varias etapas de revisión. En la redacción final del Marco colaboraron un grupo de asesores entre los que se encuentran el Dr. Héctor J. Álvarez, la Dra. Ana H. Quintero, el Dr. Jorge López, el Dr. Ricardo Dreyfous y la Dra. Carmen R. Gutiérrez Muñoz.

Agradecemos la colaboración de todos los profesionales de la educación, de una forma muy especial en el área de matemáticas, que participaron en el comité de revisión y en la redacción del documento.

El Programa de Matemáticas agradece a los siguientes educadores por su contribución al mejoramiento de la enseñanza de esta disciplina en Puerto Rico.

**Diana Droz**

Esc. Coquí  
Salinas

**Aida Ramírez**

Esc. Rafael Hernández  
San Juan II

**Sonia Pagán**

Esc. Heriberto Domenech  
Isabela

**Marieta Justiniano**

Esc. David Farragut  
Mayagüez

**Pedro Cintrón**

Esc. Petra Mercado  
Humacao

**José Vázquez**

Esc. Antonio Lucchetti  
Arecibo

**Héctor Torres**

Esc. Llanos del Sur  
Ponce

**Fernando Rivera**

Esc. Rosa Costa  
Yabucoa

**Manuel Vigo**

Esc. Papa Juan XXIII  
Bayamón

**Ilia Santos**

Esc. Santiago Negroni  
Yauco

**Alexis Montes**

Esc. Francisco Serrano  
Ciales

**Elba Velázquez**

Esc. Luis Palés Matos  
Bayamón

**Diana Vélez**

Esc. Luis Muñoz Rivera  
San Germán

**Sonia Salazar**

Esc. Juan Serrallos  
Ponce

**Raúl Marrero**

Esc. Pablo Colón Berdecía  
Barranquitas

**Sonia Suazo**

Esc. Berwind Elemental  
San Juan III

**Lily Ortiz**

Esc. Laura Mercado  
San Germán

**Alicia Santiago**

Esc. Luis Llorens Torres  
Juana Díaz

**María M. Colón**

Supervisora de Zona  
Barranquitas

**María. C. Alvarado**

Supervisora de Zona  
Orocovis

**Luz. N. Vélez**

Supervisora de Zona  
Arecibo

## GRUPO FOCAL

### **Petra Vázquez**

Esc. Raúl Juliá  
Bayamón II

### **Ivelisse Ortiz**

Esc. Purificación Rodríguez  
Coamo

### **María Fuentes**

Esc. Pedro Rivera Molina  
Juncos

### **María Torres Ponce**

Esc. Agapito Rosario  
Vega Baja

### **Maritza Pérez**

Esc. Manuel Corchado Juarbe  
Isabela

### **Rosa Catalá**

Esc. José Archilla Cabrera  
Naranjito

### **Awilda Figueroa**

Esc. Antonio Tulla Torres  
Utuado

### **Miguel Miranda**

Esc. Santiago Iglesias Pantín  
Guaynabo

### **Marta Otero**

S.U. David Colón Vega  
Morovis

### **Pedro Villafañe**

Esc. Antonio Vélez Alvarado  
Manatí

### **Diana Rivera**

Esc. Pablo Casals  
Bayamón I

### **Rosa Rodríguez**

Antonio Valero Bernabé  
Fajardo

### **Aileen Velázquez**

S.U. Sumideros  
Aguas Buenas

### **Carmen Vázquez**

Esc. Rafael Pujals  
Ponce

### **Analisse Colón**

Esc. Miguel Meléndez Muñoz  
Cayey

### **Noemí Borrero**

Esc. Luis Muñoz Marín  
Yauco

### **María de L. Plaza**

Esc. Carmen Belén Veigá  
Juana Díaz

### **Edwin Benvenuto**

CROEM  
Mayagüez

### **Edsen Colberg**

CROEM  
Mayagüez



## MENSAJE

La Educación, y por consiguiente la escuela, ocupa un lugar fundamental en el mejoramiento de la calidad de vida de la sociedad puertorriqueña. Para construir un país mejor necesitamos jóvenes que posean una educación sólida, producto de su formación al amparo de un sistema educativo de alta calidad. En este contexto afirmamos que, en buena medida, el Puerto Rico del futuro depende de las capacidades, los talentos y las facultades de los niños y jóvenes de hoy.

Es, principalmente, en la escuela donde los niños y los jóvenes pueden desarrollar su potencial y sus capacidades, y adquirir el conocimiento, el espíritu crítico y los valores que les permitirán construir una sociedad solidaria, profundamente democrática e integradora. En consecuencia, desde esta perspectiva, la escuela es un espacio vital en el cual se cultivan el respeto por la justicia, la tolerancia y el desarrollo de la cultura de paz a la que todos aspiramos. Esta convicción es la que nos motiva a unir esfuerzos para mejorar la calidad de la enseñanza que ofrece nuestro sistema educativo.

En el marco de este compromiso, hemos desarrollado el Proyecto de Renovación Curricular, con la certeza de que el currículo es la herramienta fundamental de la educación para lograr nuestros objetivos más preciados. Este Proyecto es el resultado de un proceso de reflexión, análisis y discusión de más de dos años de duración, en el que participaron maestros de nuestro sistema e importantes personalidades de la comunidad académica del País. Es pertinente señalar, además, que en una de las etapas de revisión de los documentos que aquí te presentamos, participaron padres y estudiantes de nuestras escuelas. Sus nombres y escenarios de trabajo quedan consignados en estas páginas, en reconocimiento a su valiosa aportación.

El documento **Proyecto de Renovación Curricular: Fundamentos Teóricos y Metodológicos** contiene los principios filosóficos y psicológicos sobre la naturaleza de la educación y los diferentes aspectos del proceso educativo formal, así como los principios filosóficos, científicos y valorativos en los que se fundamenta la elaboración del currículo para la escuela puertorriqueña. En el contexto de estos principios, los diferentes programas académicos han elaborado su **Marco Curricular**. Este documento contiene la misión y las metas, así como el currículo básico de cada programa. Esperamos que la comunidad educativa, en especial los maestros de nuestro sistema, encuentren en este trabajo las orientaciones que les permitan organizar e innovar su práctica educativa.

Revisar y renovar el currículo de la escuela puertorriqueña es un verdadero reto. Lo asumimos con plena conciencia y responsabilidad de que ese reto extiende sus raíces hasta la misma médula de nuestro devenir como pueblo. Ante las nuevas generaciones, queremos responder valiente y profundamente.

No obstante, sin la participación de las familias, las instituciones comunitarias, religiosas, sociales y políticas sería imposible realizar integralmente esta tarea. La responsabilidad, en última instancia, es de todos. Podremos alcanzar el éxito en la medida en que unamos nuestras voluntades para que germine en nuestros corazones la firme convicción de que "Educación somos todos".

César A. Rey Hernández, Ph.D.  
Secretario  
octubre 2003







---

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
Qué y para qué el Marco Curricular .....	1
Propósitos del Marco Curricular .....	1
Alcance y Uso del Marco Curricular .....	3
<b>VISIÓN, MISIÓN Y METAS DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS</b> .....	<b>5</b>
Valores y Necesidades Educativas de los Estudiantes y de la Sociedad Puertorriqueña y su Relación con el Estudio de las Matemáticas .....	5
Visión del Programa de Matemáticas .....	6
Misión del Programa de Matemáticas con Relación a los Valores y Necesidades de los Estudiantes .....	6
Metas a Alcanzar para Cumplir con la Misión de Satisfacer los Valores y Necesidades .....	7
<b>LA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS</b> .....	<b>8</b>
La Perspectiva Interdisciplinaria de la Asignatura, su Relación con los Valores y Necesidades Educativas .....	8
La Construcción del Conocimiento desde la Perspectiva de las Disciplinas en el Programa de Matemáticas .....	17
Estructura Conceptual, Procesos y Actitudes de las Disciplinas y su Importancia para el Logro de las Metas del Programa de Matemáticas .....	18
Conceptos y Enfoques de la Asignatura .....	20
<b>CONTENIDO DE LA ASIGNATURA</b> .....	<b>21</b>
Objetivos Generales del Aprendizaje .....	21
Objetos (Fuentes) para el Estudio del Contenido .....	21
Secuencia y Alcance Curricular .....	26
Estándares de Contenido de la Asignatura .....	33
<b>LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LA ASIGNATURA</b> .....	<b>36</b>
Principios de Aprendizaje y Desarrollo Pertinentes Derivados de la Investigación Científica .....	36
Principios de Enseñanza Pertinentes Derivados de la Investigación Educativa y la Práctica Docente .....	37
Enfoque, Estrategias y Metodología de Enseñanza Cónsonas con los Principios Anteriores que Privilegia el Programa de Matemáticas .....	40
Integración de la Tecnología en los Procesos de Enseñanza Aprendizaje .....	48
Rol del Maestro .....	49

<b>EL PROCESO DE EVALUACIÓN Y “ASSESSMENT” EN LA ASIGNATURA .....</b>	<b>53</b>
La Evaluación del Aprendizaje .....	53
<b>REFERENCIAS .....</b>	<b>61</b>
<b>APÉNDICE A</b>	
<b>DESARROLLO HISTÓRICO .....</b>	<b>67</b>
<b>APÉNDICE B</b>	
<b>USO DE CALCULADORAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS .....</b>	<b>74</b>
<b>APÉNDICE C</b>	
<b>MODELO DE VAN HIELE .....</b>	<b>83</b>
<b>HOJA DE EVALUACIÓN DEL DOCUMENTO .....</b>	<b>85</b>

---



# INTRODUCCIÓN



## ••• Qué y para qué el Marco Curricular

**E**l Marco Curricular es el documento que recoge los principios filosóficos, fundamentos, enfoques y currículo básico de cada programa de estudio, desde kindergarten a duodécimo grado. Presenta una visión integrada del currículo del programa, que incluye: la visión y la misión, las metas, el área de estudio por niveles, la organización, amplitud y secuencia del contenido, así como recomendaciones generales sobre estrategias y métodos de enseñanza y los criterios de evaluación. Esboza, en términos generales, el currículo de cada nivel, enmarcado en los fundamentos teóricos que lo sostienen.

El currículo, visto desde esta perspectiva, consta de tres dimensiones: a) el contenido (conceptos y destrezas y actitudes) para ser desarrollado, que está incluido en gran medida en los materiales utilizados; b) la metodología de enseñanza (estrategias, métodos y técnicas), enmarcada en las teorías modernas de aprendizaje que establecen al estudiante como el centro y constructor de su conocimiento; c) el proceso de “assessment”, enmarcado en las teorías cognoscitiva, humanista y sociológica del aprendizaje, así como en los hallazgos recientes de las neurociencias.



## ••• Propósitos del Marco Curricular

El Marco Curricular tiene cuatro propósitos fundamentales. Éstos son:

- 1. Establecer la misión, metas, enfoques, objetivos, contenidos y estrategias de enseñanza y de aprendizaje de los programas de estudio**

Todos los programas de estudio del Departamento de Educación se fundamentan en su misión y en las metas que procuran alcanzar a través del estudio de sus asignaturas. La misión y las metas de cada programa se fundamentan en los valores y necesidades educativas del estudiante, enmarcadas, a su vez, en las necesidades de la sociedad puertorriqueña. Estas metas se operacionalizan en la sala de clases a través del currículo de cada programa: los contenidos específicos (por nivel) que se expresan a través de los objetivos establecidos por el programa. La selección y la organización del contenido responder a enfoques y concepciones asumidos por el programa, y se reflejan en los métodos de enseñanza y en los modos de evaluar el aprendizaje.

## **2. Guiar la elaboración del currículo en sus diversos niveles de concreción**

El currículo de los diferentes programas de estudio se estructura en diferentes niveles de concreción: desde lo más general, lo que se estima como esencial de cada disciplina para todos los estudiantes, hasta su nivel más específico, como lo es el diseño instruccional. Este último es el que hace el maestro, quien en última instancia determina día a día lo que se enseña en la sala de clase. En este sentido, el Marco Curricular es el documento que sirve de base y marco de referencia para la elaboración del currículo en los diferentes niveles de concreción.

## **3. Guiar el desarrollo de investigaciones y la evaluación de la efectividad del currículo y del aprovechamiento académico**

El currículo escolar tiene como función primordial lograr que los estudiantes aprendan. El aprendizaje del estudiante ocurre en tres dimensiones del desarrollo humano, a saber: conocimiento, destrezas y valores y actitudes. Estas áreas del desarrollo del conocimiento constituyen el aprovechamiento académico del estudiante. Por esta razón, podemos medir la efectividad del currículo midiendo el aprovechamiento académico. Además, los procesos de aprendizaje y de enseñanza, en todas sus dimensiones, pueden ser objeto de investigación sistemática. En ambas instancias, este Marco Curricular ofrece los criterios fundamentales relacionados al marco teórico y filosófico en los cuales se debe basar la investigación de los procesos educativos

## **4. Orientar los procesos de preparación de maestros y desarrollo de facultad en servicio para la asignatura**

El desarrollo de una educación de excelencia en el país depende, tanto de los maestros que están en servicio como de los futuros maestros que se están formando en las universidades, en los diferentes programas de preparación de maestros. Es importante que estos programas estén, de alguna manera, en armonía con el perfil del profesional que requiere el Departamento de Educación en términos de contenido, destrezas de enseñanza y, además, valores y actitudes propios de la profesión. Es importante, a su vez, que el maestro que se reclute sea capaz de transferir a la sala de clases las teorías modernas relacionadas con los procesos de enseñanza y de aprendizaje. El Marco Curricular provee las guías necesarias para que los programas de preparación de maestros preparen a los profesionales que se necesitan en las diferentes disciplinas de nuestro programa curricular.

### ... Alcance y Uso del Marco Curricular

El Marco Curricular no es una guía curricular, tampoco es un currículum como tal. Es un documento que da los parámetros de referencia a los que tienen diferentes responsabilidades en las diversas fases del desarrollo curricular: los técnicos de currículum en la gestión de diseño, adaptación y evaluación curricular; los evaluadores en su función de determinación de pertinencia y eficacia, y los maestros, quienes hacen el trabajo fundamental en la implantación en la sala de clase. El trabajo que en estas diferentes fases se desarrolla procura, a su vez, alinear el currículum con los estándares de contenido y con los cambios e innovaciones educativas que desarrolla el Departamento de Educación. Además, va dirigido a que el maestro lo utilice al máximo en su diseño instruccional, pero sin procurar que el mismo sea prescriptivo; esto es, que ofrezca margen al trabajo creativo, original e innovador que el maestro pueda generar.

El Marco Curricular operacionaliza la implantación de un currículum basado en los Estándares de Excelencia de las materias. Provee al maestro criterios fundamentales para que se convierta en un diseñador instruccional que haga relevante el currículum en el proceso de enseñanza diario y en su contexto, pero sin abandonar el delineamiento general de las metas de la educación del país. De este modo, permitirá al maestro seleccionar, evaluar y/o diseñar su propio currículum (diseño instruccional) contextualizando el proceso de enseñanza a la realidad de aprendizaje de sus estudiantes. Esto es posible ya que el documento le provee los conceptos medulares de las disciplinas, las estrategias de enseñanza y las estrategias de “assessment” que podrá utilizar a fin de alcanzar los estándares establecidos por el Departamento de Educación para cada disciplina. Los técnicos de currículum tienen en este documento el marco teórico que debe dirigir y servir de referencia para la toma de decisiones en la elaboración del currículum. Es también muy importante para el cuerpo directivo del Departamento de Educación en sus respectivas funciones y para la comunidad en general, para evaluar las prácticas educativas implantadas en las escuelas públicas del país.

Este documento es de gran importancia para los profesores universitarios que están involucrados en los programas de preparación de maestros, ya que establece la política pública referente a las metas que procura alcanzar la educación puertorriqueña y al currículum que se requiere para lograr las mismas. Además, este documento establece de un modo claro el perfil del maestro que necesita el sistema educativo puertorriqueño. De este modo, sugiere, sin dictar pautas a las instituciones universitarias, las destrezas de enseñanza, las actitudes y, de un modo general, los contenidos que se requieren para cumplir con las metas del Departamento de Educación en sus respectivas áreas de estudio.

En fin, el Marco Curricular provee una visión clara de las metas y del marco teórico en el cual el Departamento de Educación fundamenta cada uno de sus programas. En este

sentido, contesta preguntas que, en gran medida, justifican la existencia de cada programa de estudio en el currículo escolar: ¿para qué se enseña y se aprende la disciplina?; ¿qué se enseña de esa disciplina?; ¿cómo se enseña y se aprende la disciplina? Se espera que los especialistas de currículo, los maestros, así como cualquier otro personal docente y administrativo del sistema, encuentren en este documento las bases que orientan su trabajo en las diferentes fases del quehacer curricular de un modo eficiente y a tono con los principios educativos que rigen el Departamento de Educación.

---



## VISIÓN, MISIÓN Y METAS DEL PROGRAMA DE MATEMÁTICAS



### Valores y Necesidades Educativas de los Estudiantes y de la Sociedad Puertorriqueña y su Relación con el Estudio de las Matemáticas

**E**l Programa de Matemáticas del Departamento de Educación constituye un componente fundamental y dinámico del Sistema Educativo Puertorriqueño. En su función de responder a las necesidades y exigencias de la sociedad contemporánea, comparte la misión de contribuir a formar un ser humano educado, capaz de entenderse a sí mismo y a la sociedad en que vive. El Programa aspira a reestructurar el proceso de enseñanza de las matemáticas con una nueva visión que atienda las necesidades de los estudiantes del Sistema. Entre éstas se destacan las siguientes:

1. Entender y aprender a usar el conocimiento matemático en todos los ámbitos de la vida. La educación es un proceso en constante ajuste y cambio, cuyo fin es mantener el equilibrio en una sociedad en continua transformación. (Tye, 1991). Esta situación plantea la oportunidad que debe tener todo estudiante de aprender matemáticas para transferir ese conocimiento a situaciones reales de su vida (*Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000); esto es, debe conocer la utilidad del conocimiento matemático en la solución de situaciones comunes y complejas de su vida cotidiana.
2. Comprender la complejidad tecnológica de la comunicación, cuestionar, asimilar información y trabajar en equipo solidariamente. El nuevo valor económico de la información es sólo uno de los factores que propician una pronta reestructuración de modelos educativos fundamentados en los principios de la anterior era industrial: masificación, especialización, líneas de producción y otros. Es necesario establecer el balance entre la información gráfica y la textual en modos modernos de procesamiento de información que usen tecnología avanzada (Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas, NCTM por sus siglas en inglés, 2000). La NCTM expone que los estudiantes deben prepararse para comprender la complejidad tecnológica de la comunicación, cuestionar, asimilar, información y trabajar en equipo solidariamente.

3. Asegurar el acceso a la cultura matemática dentro del sistema escolar. La sociedad requiere de un sistema escolar que asegure a todos la oportunidad de poseer una cultura matemática, de ampliar su aprendizaje y tener igualdad de oportunidades para aprender, con el fin de desarrollar ciudadanos bien informados, capaces de comprender los continuos cambios de una sociedad tecnológica (NCTM, 2000).
4. Desarrollar destrezas que capaciten al ciudadano para los procesos diarios de la toma de decisiones. La matemática es un instrumento para pensar, valorar y entender nuestro entorno.

En esta sociedad, trabajar pensando críticamente es más importante que trabajar con mayor esfuerzo físico. Por consiguiente, se necesitan ciudadanos preparados para:

- Solucionar problemas no convencionales
- Razonar lógicamente
- Transferir lo aprendido a situaciones nuevas
- Asimilar los cambios tecnológicos y sociales
- Tomar decisiones adecuadamente
- Trabajar en equipo
- Ejercitar el autoaprendizaje.

### ... **Visión del Programa de Matemáticas**

El Programa de Matemáticas visualiza al estudiante como un ser humano integral capaz de enfrentarse a la vida con una conciencia crítica que lo capacite para enfrentarse a los cambios y tomar decisiones adecuadas en beneficio de la sociedad; esto es, un individuo útil, responsable consigo mismo, que promueva una cultura de respeto, de diálogo y de paz.

### ... **Misión del Programa de Matemáticas con Relación a los Valores y Necesidades de los Estudiantes**

El Programa de Matemáticas del Departamento de Educación tiene como misión fundamental contribuir a la formación integral del estudiante, propiciando experiencias de aprendizaje que aporten al desarrollo del razonamiento matemático para la solución de problemas y la toma de decisiones de la vida diaria. El aprendizaje de las matemáticas ha de proveer los modelos que facilitan la comprensión y solución de problemas de



naturaleza cuantitativa y espacial. Además, sirve de vínculo para el desarrollo de las destrezas de pensamiento desde una perspectiva crítica y creativa.

### • • • **Metas a Alcanzar para Cumplir con la Misión de Satisfacer los Valores y Necesidades**

Las metas para la educación en matemáticas describen la aportación que hace el currículo a la formación de ciudadanos de provecho y seres humanos integrales. Se aspira a que, mediante la implantación de un currículo flexible, pertinente, y la contribución del maestro como facilitador del proceso de aprendizaje, el estudiante

**1. Se desarrolle como un ser humano integral capaz de:**

- Utilizar efectivamente la tecnología y la información que recibe
- Pensar críticamente
- Transferir y aplicar los conocimientos adquiridos
- Comunicarse con efectividad
- Valorar las acciones positivas.

**2. Practique procesos efectivos para solucionar problemas y así:**

- Identificar supuestos y circunstancias
- Organizar y manejar información
- Diseñar e implantar estrategias de solución
- Validar y comunicar los resultados.

**3. Aplique el conocimiento y las destrezas adquiridas para:**

- Tomar decisiones
- Argumentar y evaluar opciones
- Describir, controlar o modificar su ambiente
- Producir información y encontrarle valor útil.

**4. Demuestre una actitud crítica, imaginativa y creadora al analizar situaciones diarias, que le permitan:**

- Apreciar los valores positivos de nuestra sociedad
- Ser solidario en ambientes cotidianos
- Tener un sentido de pertenencia y conocimiento de su contexto histórico-social.

# LA EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

## La Perspectiva Interdisciplinaria de la Asignatura, su Relación con los Valores y Necesidades Educativas

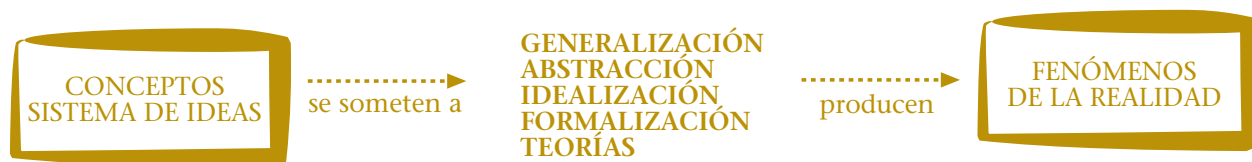
### Las matemáticas como disciplina escolar

La tradición de la enseñanza de las matemáticas como disciplina considera la aritmética, la medición, el álgebra y la geometría como lo fundamental. Sin embargo, la matemática es más que esto; consiste en ideas profundas que añaden valor a las diversas ramas de esta disciplina. Éstas se pueden ver desde diversas perspectivas, tales como:

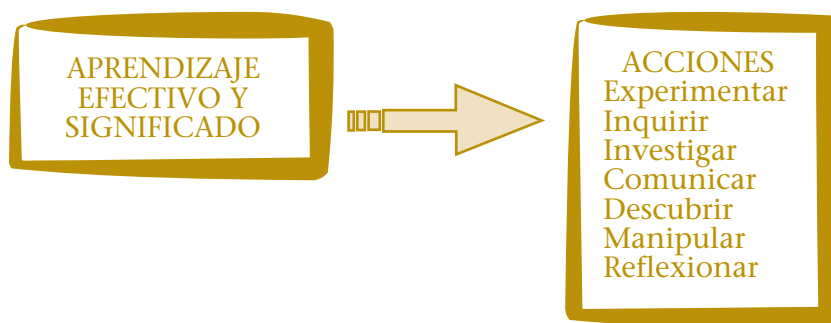


A través de la enseñanza se debe permitir que estas perspectivas se integren.

Las matemáticas tienen su origen en fenómenos de la realidad que se someten a una serie de abstracciones, idealizaciones, generalizaciones o formalizaciones, teorías para producir los conceptos y sistemas de ideas en general, según se ilustra en el diagrama. Estos últimos, generalmente, se alejan de su origen en la realidad aunque encuentran aplicación en la mayoría de las ciencias, por su alto grado de abstracción y por la posibilidad de interpretar sus formas proposicionales de distintas maneras.



Por otro lado, la matemática escolar debe ser un modelo del quehacer matemático que aporte al aprendizaje efectivo y con significado.



En este tipo de aprendizaje el estudiante:

- Manipula, experimenta, construye, cuestiona, imagina, reflexiona e investiga los contenidos y procesos de la disciplina, en contextos concretos y abstractos.
- Reflexiona y argumenta sobre la validez de las suposiciones y aumenta el grado de formalismo que eventualmente comprobará a base de las reglas de la lógica.
- Desarrolla hábitos de pensamiento y acción que lo capacitan para describir y analizar el mundo que lo rodea, tomar decisiones, controlar o predecir circunstancias así como para apreciar el poder de la disciplina.

## Disciplinas y su importancia

Las matemáticas, así como otras fuentes del conocimiento, se han dividido en ramas o disciplinas que se concentran en unos conceptos y procesos particulares. Entre las que se estudian en la escuela, se encuentran: la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística, la probabilidad, la trigonometría y la matemática discreta. El desarrollo del conocimiento matemático generalmente no reconoce fronteras entre estas disciplinas y aprovecha al máximo las ventajas de sus representaciones.

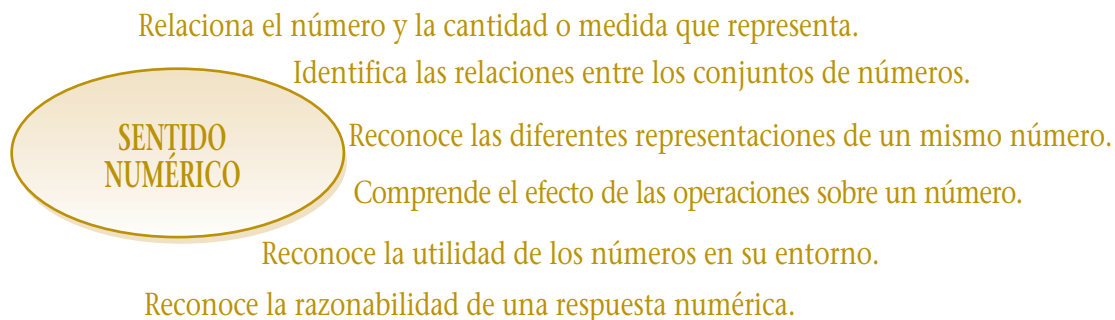
La matemática escolar debe demostrar efectivamente la interdependencia entre las disciplinas para romper el esquema tradicional de disciplinas por grado. Se debe fomentar la integración del conocimiento matemático e identificar temas centrales que brinden coherencia al estudio progresivo de los contenidos, con las herramientas que provee cada disciplina. El estudio de las matemáticas tratará recurrentemente los conceptos fundamentales de las disciplinas con diferentes grados de profundidad, establecerá conexiones y propiciará la integración entre ésta y otras áreas.

## Aritmética: numeración y operación

### Numeración

El desarrollo del sentido numérico es un proceso que se inicia en la enseñanza de los grados primarios y dura toda la vida. La importancia del estudio de este concepto surge de la realidad, porque casi todas las actividades en la vida de las personas guardan relación con los números y su aplicación.

Una persona con sentido numérico posee las siguientes características:



Como parte del proceso para el desarrollo del sentido numérico, es necesario exponer al niño a experiencias que le permitan relacionar los números con objetos de su propia vida. Los niños llegan a entender el significado de los números de forma gradual. En sus primeras experiencias deben manipular objetos físicos y más tarde explicar sus respuestas

en sus propias palabras. Al integrarlos activamente en manipulaciones físicas y tener que explicarlas, se les induce a reflexionar sobre sus acciones y a construir sus propios significados numéricos. El trabajo con símbolos numéricos ha de estar enlazado de forma significativa con materiales concretos. Se debe enfatizar en experiencias que partan de las intuiciones naturales de los niños con el propósito de construir y extender las relaciones numéricas.

Cuando los estudiantes llegan a reconocer que los números tienen múltiples representaciones, identifican y entienden la utilidad de una representación en particular en un contexto dado. La capacidad de generar, leer, usar y apreciar múltiples representaciones de la misma cantidad constituye un paso crítico cuando se aprende a entender y utilizar las matemáticas. Esto aporta para que los estudiantes lleguen a entender y apreciar las matemáticas como un cuerpo coherente de conocimiento y no como un conjunto de hechos y reglas aisladas. Al comprender esta estructura, el estudiante establece con mayor facilidad la conexión entre los diferentes conjuntos de números.

### Operación

Entender una operación es reconocer su utilidad y aplicación en situaciones que se presentan en el diario vivir. Comprender las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división, requiere un mayor entendimiento de los conceptos y sus relaciones que el algoritmo mismo. Por consiguiente, es importante proveer a los estudiantes experiencias informales de situaciones y de lenguaje, antes del trabajo simbólico con las operaciones. Se deben establecer conexiones entre sus intuiciones, el lenguaje matemático y los símbolos de cada operación. El tiempo que se dedica al desarrollo conceptual provee de significado y de contexto el trabajo posterior sobre destrezas de cálculo (NCTM, 2000).

El proceso evolutivo de las operaciones crea un ambiente de solución de problemas en el que los niños se involucran en el uso de materiales, en la discusión de tareas, en la validación de soluciones y en la formulación de preguntas. A partir del análisis de situaciones **concretas**, el estudiante desarrolla su propia nomenclatura para representar la situación. Ésta es la etapa **preformal**, en la cual el estudiante introduce símbolos, dibujos y esquemas que le ayudan en el análisis de la situación. A base de los símbolos, algoritmos, estrategias y modelos que el estudiante va desarrollando, se construyen el lenguaje y los símbolos matemáticos. Este proceso toma más tiempo que el limitarse a introducir y explicar los símbolos matemáticos. Cuando se introducen, el estudiante ya ha hecho un análisis **cualitativo** de la situación. La idea es que el estudiante entienda las nociones que necesita, de forma que cuando se introduzca el símbolo ya tenga claro lo que el mismo simboliza. En cada nivel se sigue la siguiente secuencia:



Según el nivel de desarrollo del estudiante, su idea de lo concreto varía. Así, cuando se aprende a sumar lo «concreto» es contar. Una vez el estudiante ha aprendido y automatizado la suma, la misma es «concreta» al trabajar un problema de multiplicación o división. En este sentido, lo concreto no se limita a materiales físicos ni a situaciones reales. Lo concreto es más bien una situación o problema que el estudiante puede interpretar con el conocimiento que tiene.

Una persona con sentido operacional posee las siguientes características:



El sentido operacional mantiene una interacción con el sentido numérico y permite que los estudiantes sean capaces de tomar decisiones sensatas sobre lo razonable de los resultados. Más aún, el sentido operacional ofrece un marco para el desarrollo conceptual de procedimientos de cálculo mentales y escritos.

Dotar de significado las operaciones implica también relacionarlas entre sí. La suma y la resta, así como la multiplicación y la división, tienen una relación inversa. Deben investigarse igualmente las relaciones entre la suma y la multiplicación así como entre la resta y la división.

## Geometría

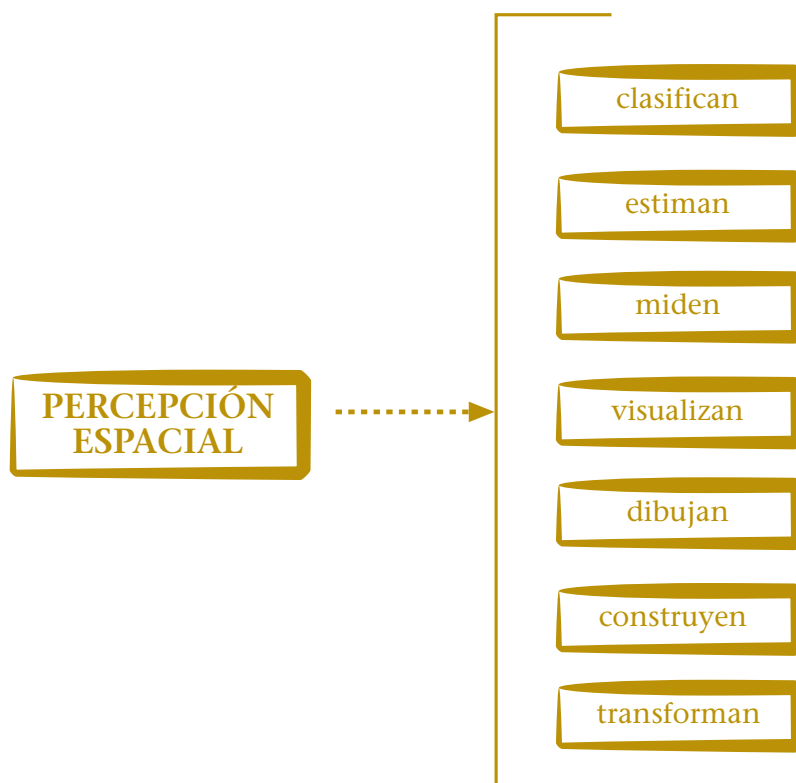
La geometría es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las formas de los objetos y las relaciones entre éstos. Su importancia parte de su utilidad como herramienta indispensable para analizar y resolver problemas relacionados con tamaño,

forma y espacio. Es una de las áreas fundamentales del currículo que facilita la integración entre temas tales como medición, numeración y operación.

Su enseñanza debe iniciarse con conceptos de la geometría tridimensional, por la conexión que se establece con el medio ambiente en que vive el estudiante. Gradualmente, se identifican las partes de las figuras tridimensionales como figuras planas y las partes de éstas como figuras de una sola dimensión. Estos conceptos iniciales se desarrollan mejor si se parte del proceso de clasificación de las formas y se enseñan en un ambiente de solución de problemas. El énfasis debe ser dirigido a la exploración e investigación de las formas y atributos en lugar de a la memorización de datos.

En este proceso se recomienda que se facilite el aprendizaje mediante el análisis de patrones, el uso y la construcción de modelos y la exploración de materiales concretos y de objetos que sean conocidos por el estudiante. Al dirigir al estudiante hacia el estudio de las formas, la dirección, la orientación, la simetría y las transformaciones de las figuras geométricas, se aporta al desarrollo de su sentido espacial. Mediante estas experiencias, se prepara al estudiante para tener una percepción más acertada del mundo que lo rodea, que es naturalmente geométrico.

Los estudiantes descubren relaciones y adquieren sentido espacial cuando:



Los conceptos espaciales son necesarios para interpretar, entender y apreciar nuestro mundo que es inherentemente geométrico. Entre los aspectos importantes del sentido espacial, se encuentran las ideas e intuiciones sobre figuras bi y tridimensionales y sus características, la relación entre figuras y el efecto que ejercen los cambios sobre las figuras. Los estudiantes que desarrollan un sentido amplio de relaciones espaciales dominan los conceptos y el lenguaje de la geometría y están mejor preparados para aprender ideas numéricas y de medición, así como otros temas matemáticos avanzados.

El desarrollo de ideas geométricas se incrementa a través de toda una jerarquía de niveles (Crowly, 1987; Denis, L. 1996; Van Hiele, 1998). Los estudiantes aprenden primero a reconocer formas enteras y después a analizar las propiedades y características de una figura. Luego llegan a ver las relaciones entre figuras y elaboran deducciones simples. El estudio de la geometría, en el nivel secundario, conecta las exploraciones informales que se comienzan en el nivel elemental con los procesos formales. La capacidad lógica de los estudiantes les permite hacer inferencias y llegar a deducciones a partir de situaciones que contienen problemas geométricos. Esto no significa que el estudio de la geometría en este nivel debe ser rigurosamente formal; en su lugar, debe ofrecer la oportunidad cada vez mayor de que los estudiantes se ocupen de realizar exploraciones sistemáticas.

### **Estadística**

En esta era de información y de tecnología, se tiene la necesidad cada vez mayor de entender cómo se procesa la información y cómo se traduce en conocimiento útil. Es importante que los estudiantes puedan entender y aplicar los conceptos y procesos que se utilizan en el análisis de datos, toda vez que la sociedad los usa cada vez más para realizar predicciones y tomar decisiones. Por consiguiente, se requiere el estudio de destrezas que capaciten al estudiante para funcionar adecuadamente en una sociedad que maneja información de forma masiva.

El estudio de la estadística comienza desde el nivel elemental. El estudiante explora con las ideas básicas de la estadística: recolecta datos adecuados a su nivel, los organiza en tablas, los representa gráficamente, los interpreta y analiza a partir de las representaciones. En el nivel secundario es necesario ampliar estos conceptos. Es importante que los estudiantes participen activamente en cada uno de los pasos que supone el estudio de la estadística: formulación de preguntas claves; recopilación y organización de datos; representación de datos por medio de gráficas, tablas, distribuciones de frecuencia y resúmenes estadísticos; análisis de datos; elaboración de conjeturas y comunicación de la información de una manera correcta y convincente.



## Probabilidad

La probabilidad ofrece conceptos y métodos que facilitan el manejo y la interpretación de predicciones hechas sin certeza. Los valores probabilísticos se usan para tomar decisiones en áreas tales como la economía, la investigación, los deportes, los negocios y el tiempo, entre otras.

La enseñanza de la probabilidad se debe conducir mediante la exploración y la investigación haciendo énfasis en la necesidad de plantear preguntas, decidir sobre la naturaleza de los datos necesarios para contestarlas, recopilar y ordenar los datos, para finalmente interpretarlos y presentarlos en forma organizada para resolver problemas.

En el nivel elemental, los estudiantes deben experimentar con vocabulario que exprese probabilidad (es posible, imposible, menos probable, probable y otros) en la primera etapa del desarrollo del concepto y posteriormente deben participar en experimentos para confirmar sus propias predicciones.

La enseñanza de la probabilidad en el nivel secundario debe centrarse en explorar situaciones de forma activa, experimentando y simulando modelos de probabilidad. Estas investigaciones deben incorporar diversos problemas reales, para que los estudiantes discutan sus ideas y usen los resultados de sus experimentos a fin de construir modelos de situaciones o predecir acontecimientos.

Estas experiencias les ofrecen una base conceptual sobre la probabilidad experimental para interpretar y estimar la validez de afirmaciones estadísticas con el fin de desarrollar conceptos formales de probabilidad teórica, tales como: definiciones formales, propiedades y fórmulas.

Es recomendable desarrollar definiciones formales y propiedades después de haber establecido una base conceptual firme, de forma que los estudiantes no apliquen fórmulas indiscriminadas cuando resuelvan problemas probabilísticos.

## Álgebra

En la actualidad, los métodos e ideas algebraicas apoyan el trabajo matemático en muchas áreas. Entre éstas, están las comunicaciones, la física, los modelos de población y los resultados estadísticos que pueden ser representados en el lenguaje algebraico. En adición, el álgebra trata de estructuras abstractas y del uso de los principios en la solución de problemas expresados con símbolos.

En el nivel elemental, los estudiantes adquieren una vasta experiencia con los números, patrones y relaciones que sirven de base al desarrollo simbólico y estructural en esta disciplina. La observación de diversas representaciones de un mismo patrón ayuda a que el niño identifique sus propiedades. El uso de letras y otros símbolos a la hora de generalizar la descripción de estas propiedades prepara al alumno para el uso de variables en el futuro.

Esta experiencia logra que el niño esté preparado para comprender las matemáticas de forma generalizada y para estudiar álgebra con mayor formalidad más adelante.

En el nivel secundario, los estudiantes aprenden a generalizar patrones numéricos para modelar, representar o describir patrones físicos y problemas que se hayan observado. Estas exploraciones informales de conceptos algebraicos deben contribuir a que el estudiante adquiera confianza en su propia capacidad de abstraer relaciones a partir de información contextual y de utilizar toda una gama de representaciones para describir dichas relaciones. El currículo debe otorgar mayor relevancia a las estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y a los métodos algebraicos como herramienta para la solución de problemas. Los estudiantes necesitan entender y relacionar los conceptos algebraicos, la estructura y los principios que gobiernan el manejo de símbolos y cómo éstos pueden ayudar a la aplicación de ideas en diversas situaciones.

Otro aspecto relevante para el estudio del álgebra es el concepto función. Las funciones son correspondencias especiales entre los elementos de dos conjuntos y las mismas permean a lo largo del currículo. En el estudio de la aritmética, las funciones aparecen como operaciones normales con números, en las que dos números se corresponden con uno solo, como en el caso de la suma de un par de números; en álgebra, las funciones se pueden representar mediante fórmulas en términos de variables que representan números; en geometría, las funciones relacionan conjuntos de puntos con sus imágenes en movimientos tales como reflexiones, traslaciones y giros; y en la probabilidad, relacionan sucesos con la probabilidad de que ocurran.

### **Trigonometría**

La trigonometría tiene su origen en el estudio de las medidas del triángulo. Muchas soluciones a problemas del mundo real, incluyendo problemas de navegación y topografía, requieren trabajar con triángulos. Además, en otros temas matemáticos, tales como la representación matricial de giros, los ángulos de dirección de los vectores, las coordenadas polares y la expresión en forma trigonométrica de números complejos, se necesitan razones trigonométricas, subrayándose la conexión que existe entre la geometría y el álgebra.

Al generalizar las razones trigonométricas del triángulo rectángulo se originan funciones trigonométricas y circulares. Estas funciones, especialmente el seno y el coseno, constituyen modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos del mundo real, tales como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonido y la variación de las mareas.

## Matemática Discreta

Durante los siglos XVII, XVIII, XIX y primera mitad del XX, el análisis fue la matemática dominante y en gran parte responsable del desarrollo científico durante este período. A partir de la segunda mitad del siglo XX y en el futuro inmediato previsible, domina la matemática discreta. Ésta ha sido la principal responsable del desarrollo tecnológico que caracteriza esta época, en especial de la ciencia de la informática.

Mientras que el mundo físico o material se expresa con más frecuencia a partir de modelos de matemática continua, es decir, análisis matemático y contenidos algebraicos, geométricos, trigonométricos, el mundo no material del procesamiento de la información exige el uso de la matemática discreta (discontinua). La tecnología informática, por su parte, ejerce una influencia cada vez mayor sobre la forma en que se crea y utiliza la matemática. Los ordenadores son máquinas finitas y discretas por naturaleza y, por lo tanto, la matemática discreta es esencial para resolver problemas por métodos informáticos. A la luz de estos hechos, resulta crucial que todos los estudiantes se familiaricen con los conceptos y métodos de la matemática discreta.

Aunque la enseñanza de la matemática discreta es relativamente nueva en el currículo preuniversitario, en este documento se considera como el estudio de las propiedades matemáticas de sistemas que tienen un número finito de elementos. No se visualiza incluirla como un curso por separado; por el contrario, se integrarán varios de sus temas al currículo de escuela secundaria.

## • • • La Construcción del Conocimiento desde la Perspectiva de las Disciplinas en el Programa de Matemáticas

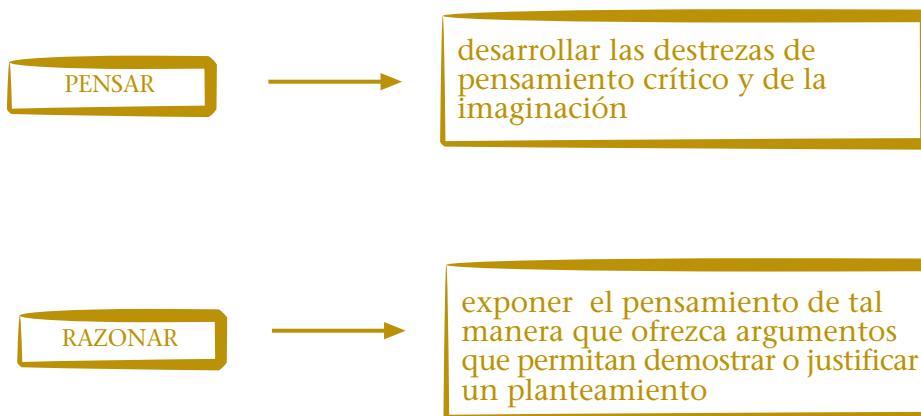
El conocimiento no consiste en la mera acumulación de datos o destrezas aisladas, sino en la construcción de una estructura coherente en la que se pueden ubicar datos y destrezas específicas (Treffers, 1987).

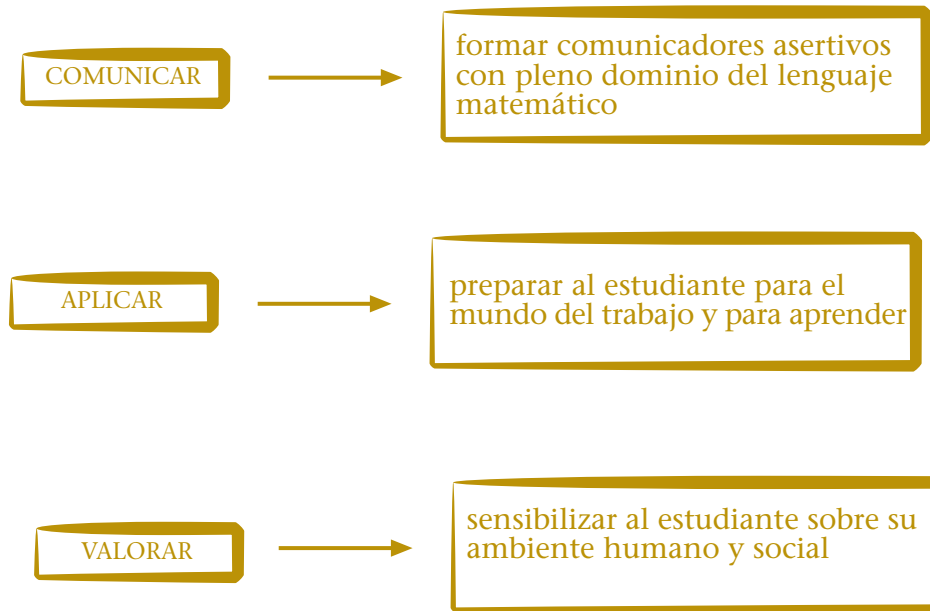
En términos generales, en la enseñanza tradicional, los estudiantes se someten al estudio de ciertas destrezas, las cuales eventualmente resultan inútiles en la solución de problemas. En este tipo de enseñanza, las interrelaciones entre las diferentes áreas de las matemáticas no están del todo claras para el estudiante. Se piensa, que si se individualizan las ideas o destrezas necesarias para la solución de problemas, el estudiante no experimentará las dificultades de aprendizaje que normalmente se asocian con la consideración de situaciones que involucran una pluralidad de ideas relacionadas. Sin embargo, en la práctica, este tipo de aprendizaje es el que evidencia los niveles más bajos de aprovechamiento académico (Treffers, 1987).

Esta situación puede afrontarse de diferentes maneras. Una de ellas es el currículo integrado, considerando una revisión del conocimiento escolar; el estudiante y su relación con la realidad social (Hernández, 2000). Otros autores, como Hargreaves, Ryan (1998), Stoll & Fink (1999), Guarro (2000-2001) y Yus (2000), ven el currículo integrado como un rumbo y una opción para enfrentarse a los desafíos y exigencias de una sociedad en continuo proceso de cambio. Estos autores destacan el esfuerzo que debe realizarse para dejar de trabajar el currículo de manera fragmentada y buscar puentes que permitan construir proyectos curriculares en los que el énfasis no sean los contenidos, sino la manera de relacionarse con ellos y entre ellos. Drake (1998) señala que, aunque el currículo integrado no es una panacea, ciertamente es un enfoque que puede atender: la reducción y la duplicidad de destrezas y conceptos de diversas disciplinas; un mayor grado de pertinencia para los estudiantes, dándoles un contexto de su realidad cotidiana; una visión holística o integradora por parte del estudiante de los temas y conceptos tratados, en lugar de ver un cuadro fragmentado de su realidad. En resumen, el currículo integrado permite la enseñanza de destrezas interdisciplinarias de vida atemperándolas a las necesidades y exigencias personales, sociales, tecnológicas y económicas del siglo XXI.

### • • • Estructura Conceptual, Procesos y Actitudes de las Disciplinas y su Importancia para el Logro de las Metas del Programa de Matemáticas

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben concentrarse en la solución de problemas pertinentes a la realidad de los estudiantes, recalcando el proceso que comienza desde la propia consideración del problema hasta la evaluación de las implicaciones que tiene su solución. Esta visión trasciende la mera acción de resolver y permite que la solución de problemas sea el medio para el desarrollo de conceptos, destrezas y actitudes. Con el propósito de que el estudiante alcance la literacia matemática, la visión de este Programa está centrada en los principios que rigen los procesos de:





El propósito fundamental que orienta la enseñanza de las matemáticas es desarrollar la capacidad para pensar, razonar, comunicar, aplicar y valorar relaciones entre las ideas y los fenómenos reales. Este conocimiento y dominio de los procesos le dará poder al educando para describir, estudiar, modificar y asumir control de su ambiente físico e ideológico, mientras desarrolla su capacidad de pensamiento y de acción de una manera efectiva.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas usarán el desarrollo de destrezas de cálculos y la manipulación de símbolos como un medio y no una meta o aspiración fundamental. Las aspiraciones fundamentales de los procesos de enseñanza y aprendizaje son:

- El dominio profundo y permanente de una base de conocimiento (dominio cognoscitivo)
- La internalización y práctica de los valores humanos positivos (dominio afectivo).

## • • • Conceptos y Enfoques de la Asignatura

La aspiración fundamental del proceso educativo es propiciar el desarrollo personal de los estudiantes. Los currículos, sus objetivos y competencias deben ir encaminados a provocar el aprendizaje y a adelantar el desarrollo del individuo como ser humano.

El estudiante construye el conocimiento matemático de forma individual. El aprendizaje es un proceso de reestructuración continua del conocimiento. En ese proceso de reestructuración, el estudiante debe tener la oportunidad de hacer conexiones significativas entre lo que aprende y lo que ya conoce. De este modo, se facilita la creación de estructuras mentales amplias que le permiten construir nuevo conocimiento.

El desarrollo integral del estudiante no puede lograrse sólo a través de la elevación de sus destrezas de pensamiento. Es necesario el balance entre la capacidad de razonar y la capacidad de valorar. El currículo de matemáticas debe aportar al desarrollo de valores éticos, de dignidad y solidaridad, y al fortalecimiento de una conciencia sociocultural que complemente las capacidades de un buen analista o de un buen pensador.

---

## CONTENIDO DE LA ASIGNATURA

### • • • Objetivos Generales del Aprendizaje

Mediante la implantación de un currículo ágil, dinámico y pertinente, el Programa de Matemáticas aspira a que el estudiante:

- Entienda los conceptos y relaciones matemáticas fundamentales.
- Desarrolle las destrezas matemáticas, de pensamiento crítico y utilice éstos como instrumentos de conocimiento, de crecimiento personal y profesional.
- Desarrolle destrezas de solución de problemas, de investigación, de comunicación y de trabajo en equipo que le permitan convertirse en un ciudadano útil y productivo en la sociedad.
- Interactúe con los adelantos tecnológicos que facilitan las tareas diarias en la sala de clase y en el mundo del trabajo.
- Desarrolle actitudes positivas, comprensión y aprecio hacia la contribución de las matemáticas a la evolución y progreso de la civilización.
- Desarrolle una conducta ética basada en valores de dignidad y solidaridad, entre otros.

### • • • Objetos (Fuentes) para el Estudio del Contenido

#### Las disciplinas académicas

El estudiante, su entorno, su desarrollo social, histórico-cultural y sus necesidades son los objetos y fuentes de estudio en el Programa de Matemáticas. En cada una de las disciplinas, los conceptos, destrezas y actitudes están relacionados con las áreas de contenido en cada nivel. De acuerdo con las necesidades identificadas y tomando en consideración diferentes documentos sobre los conceptos que deben desarrollarse, el Programa de Matemáticas ha identificado aquellos que son esenciales para cada nivel (Estándares, 2000).

De acuerdo con la teoría cognitiva, el estudiante se visualiza como un ente activo, responsable de su propio aprendizaje. Se espera que entienda los conceptos y relaciones matemáticas fundamentales, desarrolle las destrezas matemáticas de pensamiento crítico y utilice éstas como instrumentos de conocimiento, de crecimiento personal y profesional.

Además, se aspira a que el estudiante desarrolle destrezas de solución de problemas, investigación, comunicación y trabajo en equipo, que le permitan convertirse en un ciudadano útil y productivo en la sociedad e interactúe con los adelantos tecnológicos en el mundo del trabajo.

## La experiencia del estudiante y su proceso de desarrollo

El currículo debe proveer al estudiante experiencias de aprendizaje que ilustren y faciliten la integración entre conceptos, principios y procesos de la matemática.

La meta del Programa va dirigida a lograr que todos los estudiantes adquieran y actúen sobre el conocimiento al nivel estipulado por los estándares curriculares de matemáticas, y a la vez, se desarrollen como seres humanos integrales. Sin embargo, existen estudiantes con necesidades especiales que requieren atención especial a través de experiencias variadas de aprendizaje. Como consecuencia, se hace imperativo el diseño de un modelo curricular integrado, coherente conceptualmente y con temas conectados que atienda las necesidades particulares de todos los estudiantes.

Existen varias causas por las cuales los estudiantes pueden experimentar dificultades para aprender en algunas etapas de su vida escolar. Algunas causas internas son:

- alteraciones en el desarrollo intelectual
- Alteraciones del lenguaje y la capacidad psicomotora
- Alteraciones neurológicas
- Perturbaciones emocionales
- Falta de motivación (intrínseca).

Algunos factores externos que afectan el aprendizaje son:

- Problemas socioambientales
- Ausentismo escolar
- Enseñanza inadecuada
- Falta de motivación (extrínseca).



Por consiguiente, se proveerán experiencias de enriquecimiento para atender estas dificultades, una vez que se haya identificado la causa específica. Se enfatizará, por lo tanto, en el diagnóstico de las causas para aplicar un tratamiento efectivo que evite el rezago. Este enfoque de prevención puede lograrse con varias estrategias y acciones, entre las que se pueden señalar:

- Tutorías
- Materiales educativos suplementarios
- Atención a los aspectos de autoestima y motivación
- Ayuda individualizada
- Trabajo en grupo pequeño, trabajo entre pares
- El uso de materiales concretos que ayuden al estudiante a “**matematizar**” (construcción de la estructura matemática).

Todos los esfuerzos deben ir dirigidos a atender los problemas identificados, de modo que el estudiante continúe con el desarrollo del conocimiento y las actitudes que le permitan cumplir con el aprendizaje adecuado según se estipula en los estándares curriculares de las matemáticas.

Por otro lado, existen estudiantes que desde temprano en su vida escolar demuestran un alto rendimiento o talento especial para el aprendizaje de las matemáticas. Por consiguiente, es importante mantener un nivel adecuado de motivación y de reto entre estos estudiantes identificados como talentosos. Para este propósito, es preciso proveer un currículo diferenciado que atienda de una manera particular las necesidades de esta población. Entre las experiencias que se deben incorporar, se sugieren las siguientes:

- Proyectos de investigación
- Cursos de nivel avanzado
- Seminarios sobre temas especiales
- Competencias de matemáticas
- Trabajo en grupo pequeño, trabajo entre pares
- El uso de modelos que ayuden al estudiante a “**matematizar**” (construcción de la estructura matemática)
- Enseñanza a distancia (cursos en línea).

El contenido específico de estas experiencias debe armonizarse con la rigurosidad que se requiere de un nivel (grado) a otro.

## Contexto histórico cultural del estudiante

Los estudiantes del sistema de enseñanza pública poseen características socioculturales que los distinguen a los unos de los otros. De esta manera comparten diferentes contextos socioculturales que hacen que sus experiencias y necesidades sean particulares. El Programa de Matemáticas, consciente de las características y particularidades de los estudiantes, aspira a implantar un currículo ágil, flexible y pertinente que contextualice su ambiente inmediato.

Es obvio que, para entender los conceptos más allá de una clasificación de una disciplina en particular, hay que integrar contextos variados y pertinentes. De este modo, el aprendizaje se transforma en uno más significativo. Las conexiones conceptuales y de destrezas se hacen transparentes para el estudiante, y la aplicación del conocimiento a nuevas situaciones surge con más facilidad y de modo natural.

### Temas transversales que integran el currículo

Todo proceso educativo es una actividad esencialmente moral. Los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas no pueden enajenarse de la realidad social e ideológica en que se desenvuelven los maestros y los estudiantes. Por ende, se deben desarrollar, además del aprecio por el valor de las matemáticas, los valores espirituales y morales característicos de una sociedad democrática, de manera que se fomente una conducta ética en los estudiantes. Se debe propiciar un balance entre el dominio cognoscitivo y el afectivo con el propósito de fomentar el ambiente necesario para promover el aprendizaje. Los estudiantes pueden aprender matemáticas y, a la vez, desarrollar:

- Sensibilidad por lo estético
- Orgullo por lo propio
- Criterio amplio y justo
- Imaginación y creatividad
- Compromiso con los demás
- Fe en causas e ideales
- Honestidad en pensamiento y acción
- Voluntad de sacrificio.

En esta sección se proponen unos principios generales que deben orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en armonía con el enfoque pedagógico que se ha explicado. Los maestros podrán usar estos principios como guía para diseñar experiencias de

enseñanza, aprendizaje y evaluación, acorde con las necesidades de los estudiantes. El maestro asumirá el rol de moderador para facilitar el aprendizaje de sus estudiantes y planificará su enseñanza enmarcada en los principios expuestos en este documento.

## Núcleos temáticos

La gestión de enseñanza que se orienta al desarrollo de las competencias presentadas en este documento no puede reducirse simplemente a la transmisión de conocimiento matemático. Las matemáticas no se crean ni se estudian ni se usan en un vacío. Éstas deben integrarse con las demás áreas del saber para contribuir a la aspiración fundamental de formar seres humanos integrales.

Los maestros tendrán la libertad para elaborar temas específicos sobre los cuales planificar la enseñanza. Los temas transversales que se indican a continuación se recomiendan por su valor añadido a la calidad de vida en nuestra sociedad.

### Sana convivencia

- Propiciar la reflexión y la acción hacia la equidad por sexo, raza, condición física y socioeconómica
- Cultivar en nuestros estudiantes principios éticos basados en valores espirituales y morales tales como la verdad, la libertad, la justicia, la paz, la tolerancia, la laboriosidad, la dignidad y la solidaridad
- Modelar principios democráticos en la sala de clases
- Fortalecer el concepto de la familia y, en su sentido más amplio, el del país en que vivimos.

### Ambiente

- Crear conciencia colectiva para conservar el ambiente natural y las especies en peligro de extinción
- Valorar los bienes que se obtienen de la tierra.

Otros temas afines son la salud, la recreación, las artes y la cultura. Los materiales curriculares y las estrategias instruccionales deben proveer formas concretas de integrar estos temas en la enseñanza de las matemáticas. La consideración de éstos como elementos de integración en el currículo de matemáticas facilitará la interacción entre maestros de varias disciplinas en la búsqueda de soluciones a problemas comunes.

## • • • Secuencia y Alcance Curricular

La intención del currículo de matemáticas es que el estudiante adquiera poder matemático por medio de un contenido medular que sea lo suficientemente amplio y profundo. Este contenido debe proveer el trasfondo necesario que lo prepare para la vida, el mundo del trabajo, los estudios superiores de matemática y otras disciplinas. La organización del currículo debe responder a **seis conceptos fundamentales**. Esta clasificación se hace con el propósito de organizar la estructura y la función del currículo y no pretende fomentar la fragmentación del contenido de la disciplina. Estos conceptos están interrelacionados y la enseñanza de la matemática escolar debe fomentar la identificación de esas conexiones.

A continuación se provee una breve descripción de cada concepto fundamental de la matemática escolar.

### **Numeración**

Se construye el significado del concepto de los números en los diferentes sistemas de numeración. Incluye la idea y sus representaciones concretas, lingüísticas y numéricas. También se estudian el orden y el valor de cada dígito en un número del sistema decimal, las propiedades que se aplican, la razón, así como la proporción y sus múltiples usos en el mundo real.

### **Operación**

Se calcula en forma oral o escrita la suma, resta, multiplicación y división, aplicables a los diferentes conjuntos de números por medio de los algoritmos correspondientes. Entre los métodos para hacer los cálculos, se incluyen el cálculo mental, la estimación, el uso de papel y el lápiz, y la utilización de la calculadora o la computadora. Estas destrezas se desarrollarán con un enfoque de solución de problemas basado en contextos reales.

### **Geometría**

Incluye la percepción del espacio y sus subconjuntos, tales como figuras planas, tridimensionales, puntos, planos, rectas y ángulos, así como sus relaciones.

Se estudian también las transformaciones y los conceptos de simetría, semejanza y congruencia. Su estudio secuencial comienza con la construcción y clasificación

de figuras geométricas, deducciones informales y formales, hasta el estudio de este concepto como un sistema axiomático. Los conceptos y destrezas se desarrollarán con un enfoque de solución de problemas.

Los números se usan para describir y representar cantidades de unidades de tiempo, temperatura, distancia, peso o masa, capacidad y medidas de ángulos, por medio de instrumentos de medición. Se incluyen aplicaciones como perímetro, área o volumen de figuras. Su estudio secuencial incluye hacer comparaciones y estimados de las medidas a través de un enfoque de solución de problemas.

### **Álgebra**

Se comparan conjuntos para establecer las relaciones entre los mismos, por medio de símbolos de relación. Se representan patrones y funciones para resolver problemas. Se enfatiza en las operaciones algebraicas y su representación gráfica. A medida que se avanza en el estudio formal de la matemática, se integran otras funciones como las trigonométricas.

### **Probabilidad y análisis de datos**

Se realizan experimentos o simulaciones para determinar la probabilidad de que ocurra un evento dado. Incluye el estudio de la probabilidad experimental y teórica y sus aplicaciones en el mundo real.

El estudio de la estadística incluye la recopilación, interpretación, análisis y representación de datos en forma de tablas, gráficas y otras. Su estudio secuencial comienza con las estadísticas descriptivas y se consideran aspectos de la estadística inferencial.

### **Medición**

Los números se utilizan para describir y representar cantidades de unidades de tiempo, temperatura, distancia, peso o masa, capacidad y medida de ángulos, promedio de instrumentos de medición. Se incluyen aplicaciones como el perímetro, área y volumen de una figura. Su estudio secuencial incluye hacer comparaciones y estimados de las medidas a través de un enfoque de solución de problemas.

El contenido de estos seis conceptos fundamentales responde a uno o varios de los estándares de contenido de los grados K-12 del documento Estándares de Excelencia (2000)

elaborado por el Programa de Matemáticas, Departamento de Educación de Puerto Rico y el documento Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000). Esta descripción del contenido clarifica la estructura y función del currículo. Ayuda a operacionalizar el desarrollo de nuevos currículos, a partir de una base común del contenido que debe incluirse bajo cada concepto fundamental.

## Contenido y procesos

El tema del contenido y los procesos en las matemáticas será tratado de forma general en esta sección del documento, puesto que la información más precisa estará contenida en los prontuarios o guías de cada uno de los grados. En esta sección, se presenta el resumen del conocimiento matemático que se enseñará en cada uno de los cuatro niveles escolares, las cuales se definen del siguiente modo:

NIVEL I	: Kinder al Tercer Grado
NIVEL II	: Cuarto al Sexto Grado
NIVEL III	: Séptimo al Noveno Grado
NIVEL IV	: Décimo al Duodécimo Grado

El conocimiento asociado con cada uno de los conceptos fundamentales se divide en dos grupos:

CONTENIDO:	los conceptos y principios fundamentales de las matemáticas
PROCESOS:	las destrezas, algoritmos y acciones que se llevan a cabo con el contenido.

## Secuencia y alcance curricular

Los contenidos y procesos que comprenden cada uno de los seis conceptos fundamentales de matemáticas se conectan a través del currículo, con diferentes grados de énfasis y profundidad. La secuencia y la amplitud con que se tratan estos contenidos garantizan la fluidez y conexión en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La cantidad de tiempo y el momento específico en que se deben tratar estos contenidos y procesos

dependen de muchos factores, especialmente del nivel de desarrollo del educando. A continuación se describe un modelo de acción para estructurar el currículo de matemáticas en los cuatro niveles escolares; se describen el **alcance**, la **secuencia**, la **profundidad** y las **conexiones** para los seis conceptos fundamentales del currículo de matemáticas.

### Alcance

Los contenidos y procesos presentados anteriormente se tratan de forma diferente en cada uno de los niveles. Unos conceptos reciben mayor o menor atención en cada uno de éstos. Es necesario tratar con mayor alcance o extensión los conceptos en el momento en que su tratamiento es más pertinente y apropiado. Las ilustraciones que aparecen a continuación establecen el alcance o extensión de tiempo con que se tratan los seis conceptos fundamentales en cada uno de los cuatro niveles escolares. El área de cada rectángulo representa el alcance o extensión de tiempo que se dedicará a cada concepto fundamental.



El Nivel I tratará con mayor extensión el estudio de los números y sus operaciones, con el propósito de sentar las bases para el estudio de los demás conceptos. La necesidad de trabajar con estos conceptos en la fase concreta permitirá conectar lo estudiado con las destrezas de Medición. El área de Geometría recibirá un tratamiento moderado, centrado en la identificación, construcción y clasificación de figuras y en el desarrollo de la percepción espacial. En este nivel, se iniciarán, de modo muy limitado, los conceptos de Álgebra, Estadística y Probabilidad.

NIVEL II

Leyenda:

N y O: Numeración y Operación

A: Álgebra

GE: Geometría

ME: Medición

ES-PR: Estadística y Probabilidad



Este nivel continuará el desarrollo de los conceptos fundamentales de Numeración y Operación. El énfasis mayor será en las operaciones, las cuales incluirán destrezas computacionales de aritmética mental, estimación, cálculos con lápiz y papel, y calculadoras. Se amplía el estudio de la Geometría. Se establece la conexión entre los conceptos geométricos, los conceptos de numeración, de operación y de medición usando los conjuntos de los números cardinales, decimales (sistema métrico) y fraccionarios (sistema inglés). Los conceptos de Álgebra, Estadística y Probabilidad, continúan ampliándose, pero en menor extensión relativa que los demás.

NIVEL III

Leyenda:

N y O: Numeración y Operación

A: Álgebra

GE: Geometría

ME: Medición

ES-PR: Estadística y Probabilidad



En el nivel III, la mayor cantidad de tiempo se dedica al contenido y los procesos de la Geometría y del Álgebra, ya que se comienza a formalizar el estudio de estas disciplinas. La Estadística y Probabilidad comienza a ocupar una mayor porción del tiempo, ya que se inicia el estudio formal de este concepto fundamental como una rama de las matemáticas. El concepto de Medición se amplía para incluir el estudio de fórmulas basadas en expresiones algebraicas. La Numeración y Operación requieren menos tiempo para refinar las destrezas aprendidas en los otros niveles.



NIVEL IV

Leyenda:

N y O: Numeración y Operación

A: Álgebra

GE: Geometría

ME: Medición

ES-PR: Estadística y Probabilidad

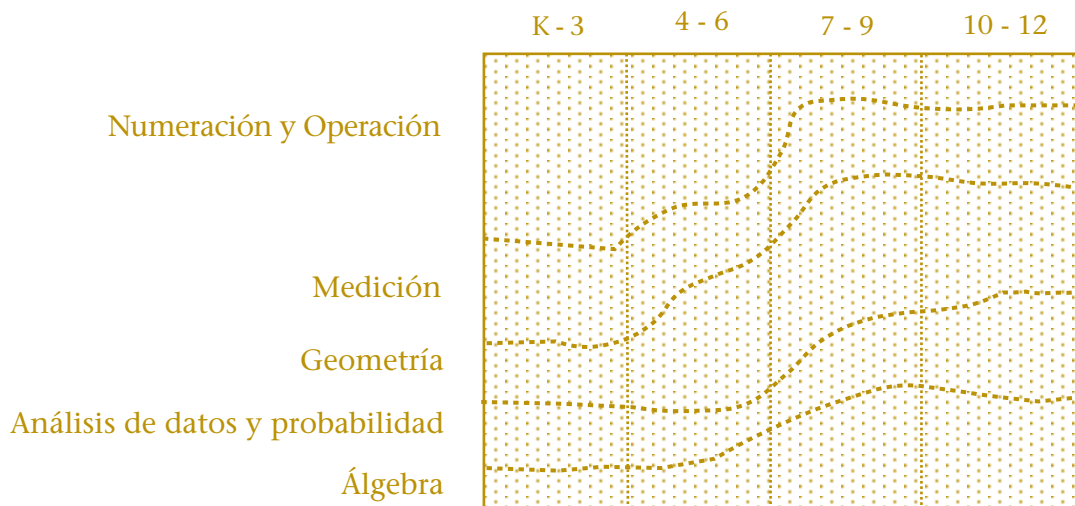


En este nivel se aspira a un mayor grado de abstracción y profundidad en el estudio del Álgebra. La Geometría, la Estadística y Probabilidad reciben considerable atención, ya que se formaliza el estudio de estas ramas de la matemática. Los conceptos de Numeración, Operación y Medición se atienden en menor medida para reforzar los conocimientos previamente aprendidos y para conectarlos con los otros tres conceptos que reciben mayor atención en este nivel.

**Secuencia y profundidad**

Los contenidos y procesos en cada área se ordenan en una secuencia adecuada para la construcción progresiva y coherente de un conocimiento más profundo y abstracto.

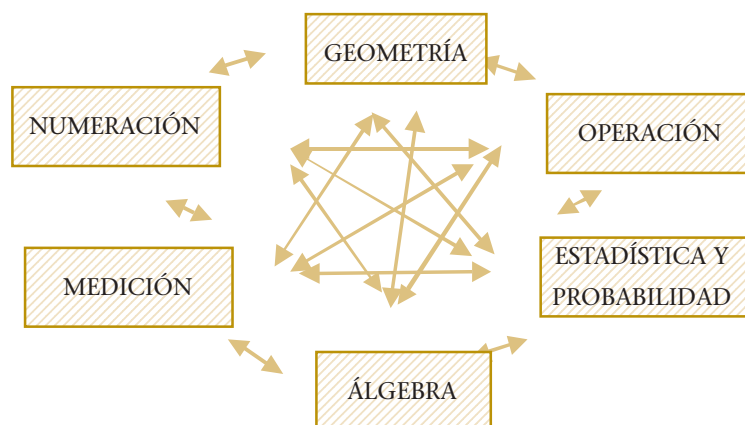
El diagrama que aparece a continuación ilustra el contenido del currículo organizado de menor a mayor profundidad a través de los cuatro niveles.



## Conexiones

El currículo de matemáticas fomentará que el estudiante descubra, identifique y aprecie las conexiones entre los distintos temas y conceptos matemáticos, así como su relación con otras disciplinas escolares como las ciencia y los estudios sociales. La elaboración de un currículo pertinente supone, además, el establecimiento de conexiones entre las matemáticas y los aspectos de la vida diaria a los cuales están expuestos los estudiantes. Para evitar que el estudiante adquiera conocimientos fragmentados, la estructura curricular y la enseñanza deben fomentar una visión integradora en la que cada «fragmento» tenga sentido. Por ende, las distintas ramas de las matemáticas deben conectarse para dar unidad al estudio de la disciplina.

El maestro de matemáticas deberá identificar conexiones al planificar su enseñanza y provocar que el estudiante las descubra. La siguiente ilustración presenta todas las posibles conexiones entre los conceptos fundamentales. Luego se explican algunas conexiones generales entre los conceptos fundamentales que son apropiadas para cada nivel. Este esquema de conexiones no debe verse como un modelo rígido, sino como una sugerencia sobre la cual se pueden tomar decisiones específicas.



En todos los niveles, los conceptos de Numeración y Operación están estrechamente conectados. La Medición, la Estadística y Probabilidad, en el primer nivel, se conectan con la Numeración para contribuir al desarrollo del concepto del número. Las Relaciones, en este nivel, se estudian de modo concreto, lo cual facilita su conexión con el concepto de Geometría.

En el segundo nivel, la Medición y el Álgebra fomentan el estudio de la Geometría. La Estadística y Probabilidad sigue sirviendo de contexto para el estudio de la Numeración (por ejemplo: el uso de fracciones en el estudio de probabilidad).

En el tercer nivel, la Medición y el Álgebra se desarrollan para contribuir al estudio de la Estadística. Sin embargo, en el último nivel, la Estadística y la Medición fomentan el concepto de Relación. La Geometría se torna axiomática en este nivel.

### ... Estándares de Contenido de la Asignatura

Un **estándar** es un criterio que juzgará la calidad del currículo de matemáticas. En su esencia, son aseveraciones sobre lo que se valora en una disciplina, en este caso, en las matemáticas. En resumen, un **estándar** puede definirse como:

- Una afirmación-declaración que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo matemático o de métodos de evaluación; así, los estándares son declaraciones de qué tiene valor y qué no lo tiene.
- La visión de lo que se pretende que los estudiantes sean capaces de hacer.
- Un criterio que sirve para juzgar excelencia y calidad.
- Una aseveración que describe los resultados deseados.

Los estándares representan metas altas en torno al desarrollo de conceptos y, a su vez, es un marco filosófico para el diseño curricular. Además, sirven como base para el desarrollo de estándares de ejecución (“performance standards”) y para definir el perfil de competencias que los estudiantes deben conocer y demostrar durante sus estudios escolares. Las competencias son habilidades, producto del dominio de los conceptos, las destrezas y las actitudes que el estudiante debe demostrar en forma integral, a un nivel de ejecución previamente establecido.

A partir de los estándares:

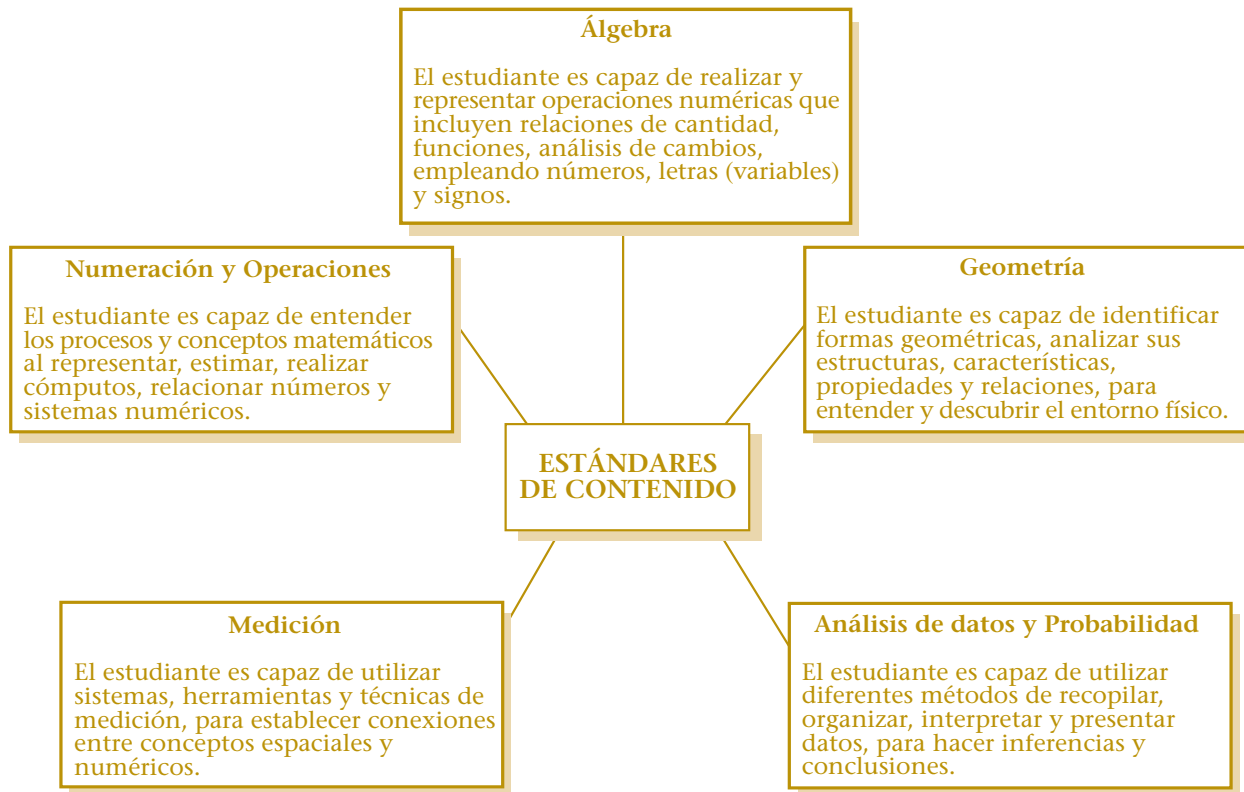
- Se definirán los objetivos, el alcance, la secuencia y la profundidad de conceptos, destrezas y actitudes propias de cada grado.
- Se definirán las competencias que los estudiantes deberán dominar en cada grado y nivel.
- Se desarrollarán actividades educativas y la metodología apropiada para atender los diversos estilos de aprendizaje.
- Se recomendarán métodos y técnicas para llevar a cabo la medición y el “assessment” del aprendizaje.

En el caso particular del currículo del Programa de Matemáticas, esta información se encontrará en los prontuarios de cada grado.

## Sinopsis de los estándares

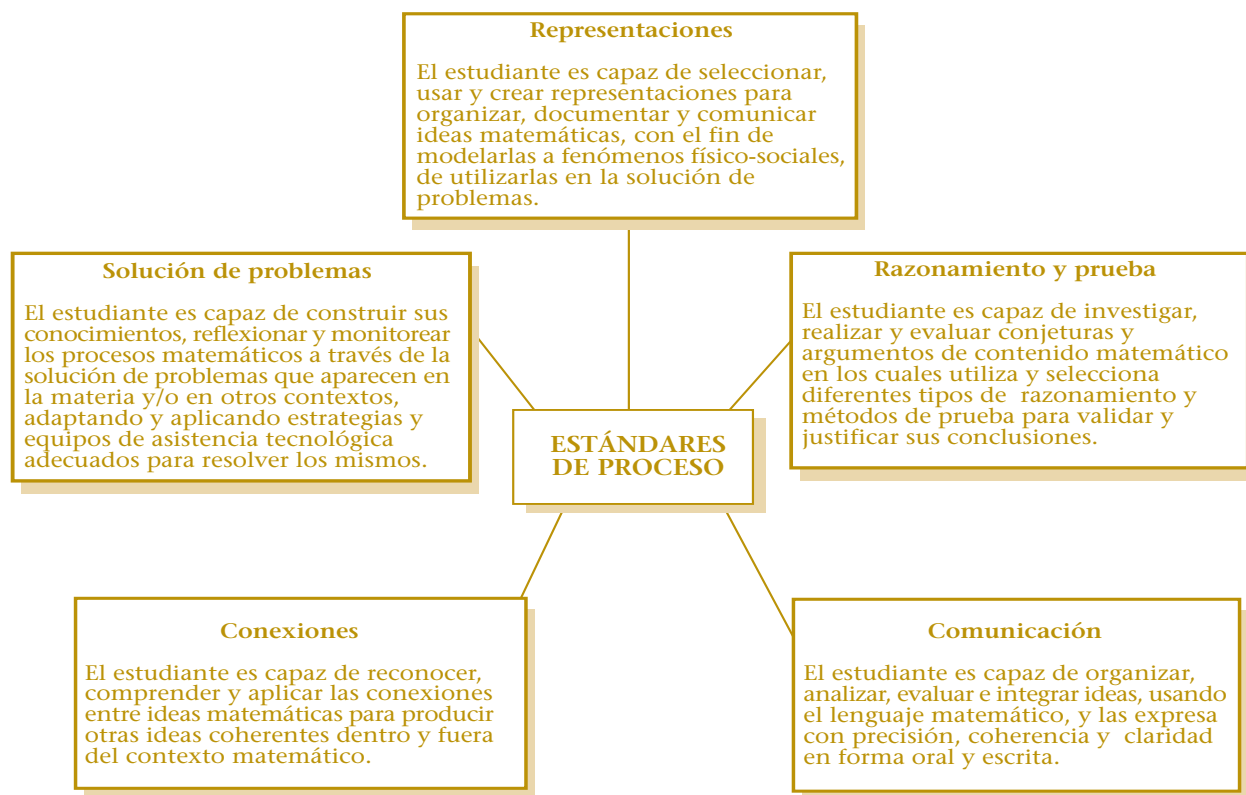
Los estándares curriculares de contenido presentan un resumen de las habilidades o destrezas que los estudiantes deben conocer y poder desarrollar en cada nivel educativo. Representan la base sobre la cual se desarrollan los currículos de matemáticas.

En el diagrama siguiente se ilustran los estándares de contenido y una sinopsis de los mismos.



Es preciso señalar que los estándares de contenido no especifican todas las destrezas y subdestrezas que se espera que el estudiante desarrolle. Estas destrezas deben especificarse en la redacción de los currículos. Un estándar, redactado en forma breve, puede representar un área tratada con bastante extensión y profundidad.

El aprendizaje de las matemáticas se facilita cuando los estudiantes solucionan problemas, se comunican, razonan, prueban, hacen representaciones y reconocen las conexiones intrínsecas de la materia y su relación con otros campos del saber y con la vida diaria. Estos procesos se utilizan para aprender los conceptos fundamentales de Numeración, Operación, Geometría, Medición, Estadística y Probabilidad. A estos estándares de proceso, se le añade el elemento de valorar. Con esta acción, se ratifica la



recomendación de que los estándares deben ser adaptables a las condiciones particulares del lugar en el cual se van a implementar.

En su esencia, los estándares de proceso representan la aportación que hace la educación matemática a la formación integral del educando. Aunque estos estándares se definen individualmente con fines prácticos para el diseño y desarrollo del currículo, en la práctica coexisten y se entremezclan (con mayor o menor intensidad) en cualquier situación de aprendizaje.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje, se deben integrar tanto los estándares de contenido como los estándares de proceso, con el propósito de que aporten significativamente al desarrollo de los conceptos.

---



## LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LA ASIGNATURA

### Principios de Aprendizaje y Desarrollo Pertinentes Derivados de la Investigación Científica

**H**istóricamente los procesos de enseñanza y aprendizaje se enmarcan en la teoría del aprendizaje que el docente crea y entiende, y lo utiliza en la sala de clase de manera consciente o inconsciente. Los filósofos, psicólogos y recientemente los neurocientíficos, han desarrollado principios y teorías que apuntan a la interrelación del mundo físico, biológico, psicológico y social del estudiante con su aprendizaje.

Varias teorías del aprendizaje influyen sobre la educación en Puerto Rico. Entre las mismas, se destacan la teoría conductista, de Skinner (1974) y E. L. Thorndike, y la teoría constructivista o cognoscitiva, de Piaget (1981) y Vigostki (1978). Este último añade dos aspectos esenciales al desarrollo cognitivo: la cultura y la interacción social. Mientras la primera teoría conceptúa al estudiante como un recipiente de información, la segunda plantea que éste actúa sobre la información que recibe para acomodarla a sus experiencias pasadas. De ese modo construye su propia interpretación del mundo en que vive.

Por un lado, el enfoque conductista parte del supuesto de que los estudiantes no conocen el tema que se va a discutir y pueden contribuir muy poco al desarrollo de conceptos y procesos. Las clases son básicamente deductivas y la instrucción se conduce en forma directa, o sea, se presenta un dato, propiedad o regla, y se dirige al estudiante a manejar la información siguiendo un método dado. La tarea de los estudiantes se circunscribe a aprender la información y a practicar el método hasta que se haya incorporado al pensamiento. Por otro lado, la teoría cognitiva define el conocimiento como la interacción del individuo y su ambiente. En este proceso, el aprendiz interpreta las experiencias educativas a la luz de su conocimiento. Desde esta perspectiva, el estudiante construye su conocimiento, sus propios significados y explicaciones de su entorno.

La aportación de las ideas de Piaget y Vigotski han sido fundamentales para la elaboración de un pensamiento constructivista en el ámbito educativo (Carretero, 2001). Con el surgimiento de la psicología cognitiva, predominantemente en educación, se hace imperativo considerar las capacidades cognitivas del estudiante en términos de los niveles de complejidad del pensamiento, según plantea Bloom (Armstrong, 1999).

A la luz de estos cambios en las prácticas de la enseñanza, el Programa de Matemáticas reconoce que el estudiante construye el conocimiento matemático a través de experiencias

que aportan a que éste establezca relaciones significativas entre lo que aprende y lo que ya conoce. Esto sugiere que el conocimiento que se transmite en cualquier situación de aprendizaje debe estar estructurado no sólo en sí mismo, sino con respecto al conocimiento que ya posee el estudiante (Carretero, 2001). De este modo se facilita la creación de estructuras mentales que dan lugar a la construcción del nuevo conocimiento.

### • • • Principios de Enseñanza Pertinentes Derivados de la Investigación Educativa y la Práctica Docente

El proceso de enseñanza debe estar enmarcado en los aspectos teóricos concernientes a la teoría cognitiva. A continuación se describen varios principios inherentes al proceso de enseñanza de las matemáticas.

#### El aprendizaje matemático es un proceso social

Las matemáticas, como la mayor parte de las disciplinas, se desarrollaron por el interés del ser humano en entender e interpretar su mundo (Kline, 1972 y Davis, P. J. y Hersh, R., 1981). Por lo tanto, su enseñanza también debe partir de situaciones de interés para el estudiante, en las que las matemáticas aportan al entendimiento e interpretación de la situación. En el proceso de apoyar al estudiante a entender una situación que requiere de los conceptos matemáticos, la enseñanza debe considerar la forma como éstos se aprenden.

Una de las críticas a la teoría de Piaget es que presenta el aprendizaje como un proceso principalmente individual. Bruner (1996), por ejemplo, ha planteado que el aprendizaje no es una tarea solitaria, sino que ocurre en sociedad y es dirigida y estimulada por el contexto sociocultural. Por esto, el ambiente en el salón de clases debe reflejar lo que creemos sobre el aprendizaje, promover el diálogo, la discusión entre los aprendices y fomentar el desarrollo de valores positivos a la vez que se aprenden los contenidos y procesos matemáticos. En estas discusiones, la intervención del maestro debe ir dirigida a promover la reflexión e investigación en lugar de presentar la respuesta. A través de preguntas se debe inducir a los estudiantes a la reflexión y a que se percaten de la efectividad de ciertas estrategias.

La enseñanza, desde la perspectiva constructivista, requiere reflexión por parte del estudiante, no sólo en torno a sus pensamientos, sino en torno a los pensamientos de otros estudiantes y del maestro mismo (Freudenthal, 1991). El estudiante aprende matemáticas cuando reflexiona en torno a su propio razonamiento y al de sus compañeros. Más aún, un estudiante aprende matemáticas cuando reflexiona sobre sus propios errores y sobre sus razonamientos fallidos en el intento de solucionar algún problema. Treffers (1987) y Clark (1994) sostienen que la reflexión es un recurso valiosísimo en la construcción

del conocimiento y ayuda a elevar el aprendizaje a niveles de abstracción cada vez más altos. Añaden que debe ser motivo de reflexión todo tipo de producción de los estudiantes que se da con referencia a la solución de problemas matemáticos, las observaciones de los estudiantes, sus aseveraciones, sus razonamientos y sus errores, entre otros asuntos. La educación matemática debe entonces proveer al estudiante de múltiples oportunidades de reflexión sobre las ideas centrales del currículo.

## El aprendizaje matemático sigue un estilo global

La visión del aprendizaje que guía el currículo escolar postula que la construcción del conocimiento sigue el estilo lineal, esto es, se parte de lo más sencillo y se va construyendo los conceptos más complejos. En el caso de las matemáticas este principio se traduce en la necesidad de aprender una serie de conceptos básicos que luego se integran al interpretar una situación más compleja.

Lakoff (1987) presenta otra visión del desarrollo del conocimiento. Para comenzar, él plantea que los conceptos que son simples analíticamente no necesariamente son simples cognoscitivamente. Por ejemplo, en la geometría los conceptos de línea, plano y punto son simples analíticamente; son los conceptos que se utilizan de base para definir todos los otros conceptos de la geometría euclideana. Sin embargo, al niño se le hace más sencillo entender el concepto de triángulo, el cual se define a partir de los conceptos de línea y punto. El estudiante ha tenido mayor experiencia informal con triángulos que con puntos y líneas. Estos últimos son construcciones matemáticas más abstractas cognoscitivamente. **Así la lógica del aprendizaje no es la misma que la lógica de la disciplina bajo estudio.** De hecho, la lógica del aprendizaje corresponde más a la historia del desarrollo de los conceptos de la disciplina. El estudiar el desarrollo histórico de los conceptos ilumina el estudio del desarrollo conceptual en los niños (Carey, S., 1985).

## El aprendizaje matemático ocurre a través de diversas rutas

El aprendizaje y la construcción del conocimiento no se da en forma igual en todas las personas (Gardner, H., 1995). Según Gardner, el ser humano posee diferentes talentos, a los que llamó inteligencias múltiples para reconocer las capacidades humanas. Estas inteligencias son: visual/espacial, verbal/lingüística, musical/rítmica, física/kinestética, interpersonal/social, intrapersonal/introspectiva, lógica/matemática y naturalista. El planteamiento de Gardner, lejos de ser un dogma o una verdad absoluta, es una invitación a contemplar a los estudiantes desde diferentes perspectivas de inclusión educativa.

Por ejemplo, cuando los estudiantes resuelven un problema, se debe permitir que utilicen sus intuiciones y su propio método e interpretación de acuerdo con sus de las



habilidades y talentos. El método utilizado por el estudiante reflejará su entendimiento del problema. Al permitir que un estudiante trabaje un problema matemático utilizando las estrategias que éste crea conveniente, el maestro descubre el grado de sofisticación matemática y el nivel de abstracción alcanzado por el estudiante.

El conocer cómo los estudiantes interpretan diferentes problemas ofrece una idea de los niveles de análisis que éstos poseen, lo que constituye una forma de evaluación (“assessment”) a través de la discusión en el salón de clases. Por esto es importante observar al estudiante y tratar de entender la forma como está entendiendo la situación. Sólo así se puede facilitar la construcción de su conocimiento.

A partir de este análisis se deben diseñar actividades que atiendan las concepciones de los estudiantes, de forma que vayan ampliando, profundizando o corrigiendo las mismas, según sea el caso. De hecho, la discusión entre los mismos estudiantes de sus estrategias puede ayudarlos a que aprendan de sus compañeros estrategias más eficientes.

### La matemática en contexto e integrada

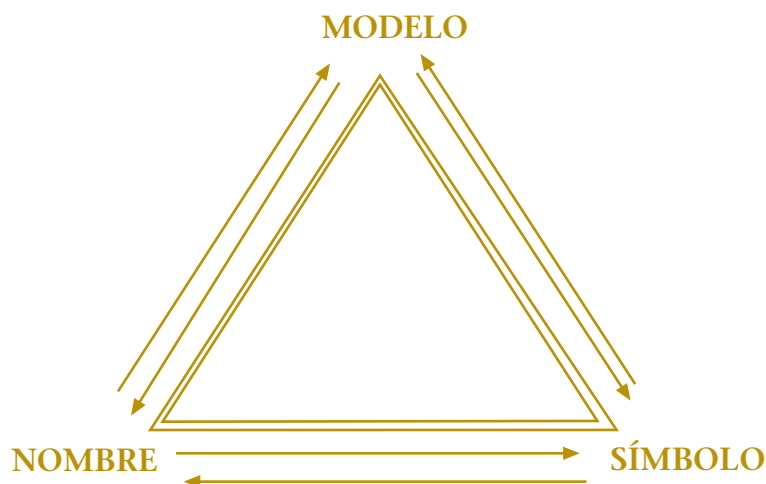
En la enseñanza de las matemáticas, como en la de cualquier otra disciplina, es necesario partir de situaciones que tengan sentido para el estudiante. En los niveles elementales, lo ideal es que estas situaciones integren diferentes disciplinas, o sea, en estos niveles se debe trabajar con un currículo integrado. En el currículo integrado, se eliminan las divisiones artificiales por materias y se utilizan temas generadores y redes semánticas, que sirven para la definición de contenidos y la búsqueda de materiales. A diferencia del currículo regular, en el que esos conceptos y destrezas se presentan en un orden jerárquico y específico, hay más libertad para ordenar los mismos, aunque en el interior de un área temática es necesario cierto orden.

Es obvio que para entender los conceptos más allá de una clasificación de una disciplina en particular, hay que integrar contextos variados y pertinentes. De este modo, el aprendizaje se transforma en uno más significativo; las conexiones conceptuales y de destrezas se hacen transparentes para el estudiante, y la aplicación del conocimiento a nuevas situaciones surge con más facilidad y de modo natural. Por otro lado, el desarrollo de las ciencias cognitivas y las neurociencias sugieren que los seres humanos cruzan las líneas de las disciplinas para solucionar problemas diariamente. La teoría cognitiva del aprendizaje postula que el modo natural como las personas aprenden es en un contexto interdisciplinario (Martín, D., 1997; Jacobs, H., 1989; Perkins, D., 1989; Spicer, J., 2001).

## Enfoque, Estrategias y Metodología de Enseñanza Cónsonas con los Principios Anteriores que Privilegia el Programa de Matemáticas

Las matemáticas en sí están constituidas por *conceptos*, *destrezas* y *procesos*. El *concepto* es la idea que fundamenta las destrezas, los símbolos, las operaciones y la solución de problemas. La adquisición de conceptos matemáticos requiere que los estudiantes establezcan conexiones entre las diferentes representaciones de los conceptos: *concreto*, *verbal* y *simbólico*.

El modelo que se muestra a continuación representa la visión del procedimiento necesario para desarrollar un concepto.



El desarrollo de un concepto requiere conexiones entre tres componentes: el modelo que representa el concepto, el nombre que se le asigna y el símbolo que se utiliza para representarlo. Esta trilogía, *modelo*, *símbolo* y *nombre*, siempre está presente en toda comunicación del pensamiento. Estas conexiones están representadas por las flechas en ambas direcciones. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es fundamental reconocer la diferencia, significado y relación entre sí de los elementos de esta trilogía.

Se pueden establecer seis conexiones diferentes. Éstas son: del modelo al nombre, del nombre al modelo, del modelo al símbolo, del símbolo al modelo, del nombre al símbolo y del símbolo al nombre. En el proceso del desarrollo conceptual, el maestro debe propiciar procesos de enseñanza y aprendizaje basados en experiencias que permitan establecer este tipo de conexiones, de forma tal que los estudiantes logren desarrollar, entender y aplicar los conceptos fundamentales, según se ilustra en el modelo triangular.

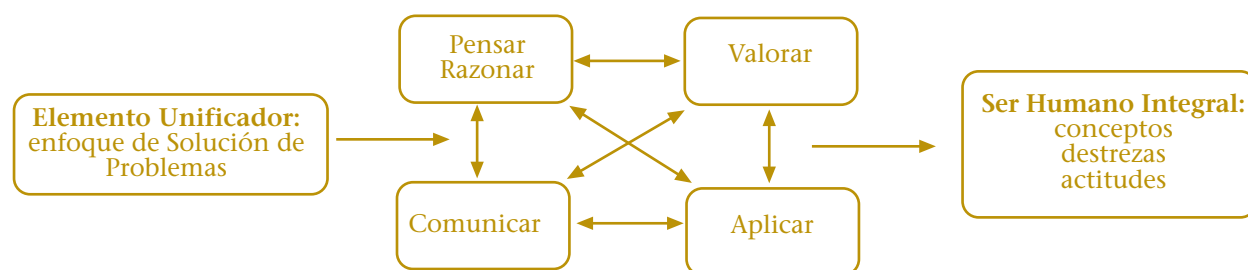
Las *destrezas* incluyen el entendimiento de los conceptos aritméticos básicos y los algoritmos. Los *procesos* matemáticos son aquellos que demuestran cómo usar las destrezas

de manera creativa para resolver nuevas situaciones. La enseñanza de las matemáticas debe dar énfasis a ambos aspectos logrando que el estudiante armonice el dominio de destrezas con la aplicación de los procesos. El enfoque de solución de problemas como metodología de la enseñanza de las matemáticas atiende ambos aspectos.

## Enfoque: solución de problemas

La solución de problemas tiene un propósito más amplio que meramente pensar en problemas matemáticos. Cuando se piensa sobre esto, el objetivo fundamental de educar a los estudiantes es precisamente lograr desarrollar en ellos destrezas para solucionar problemas.

El currículo dará énfasis a la solución de problemas como proceso unificador de la enseñanza y como promotor del desarrollo integrado de habilidades para pensar, razonar, comunicar, aplicar y valorar.



Todo proceso de solución de problemas involucra cierto tipo de información ya sea perceptual, psicológica o sensorial (Dewey, 1910). Éste establece que el proceso de recopilación de información se relaciona estrechamente con el aprendizaje por descubrimiento, proceso a través del cual el aprendiz es participante activo de su propio aprendizaje. George Poyla (1957) establece que todo principio matemático es transferible y afirma que existe una “fibra de descubrimiento” en la solución de problemas. Éste señala que es bastante sencillo encontrar una estrategia para resolver problemas. No obstante, existen ciertos problemas, los cuales requieren explorar y jugar con la información, antes de pensar en una estrategia de solución.

En la definición de una situación como problema, debe considerarse el desarrollo cognitivo de la persona que enfrenta la situación. Lo que es un problema para un estudiante puede ser que no lo sea para otro. La diferencia puede estar en las experiencias vividas, que provocan diferentes niveles de desarrollo. Según John Flavell (1976), la metacognición (entiéndase como los procesos cognitivos de cada individuo) es un elemento esencial en el proceso de solucionar un problema. Estas actividades cognitivas abarcan el establecer conexiones en el problema planteado, simplificar el problema, el conocimiento y las experiencias previas de los estudiantes.

## ¿Cómo se resuelve un problema?

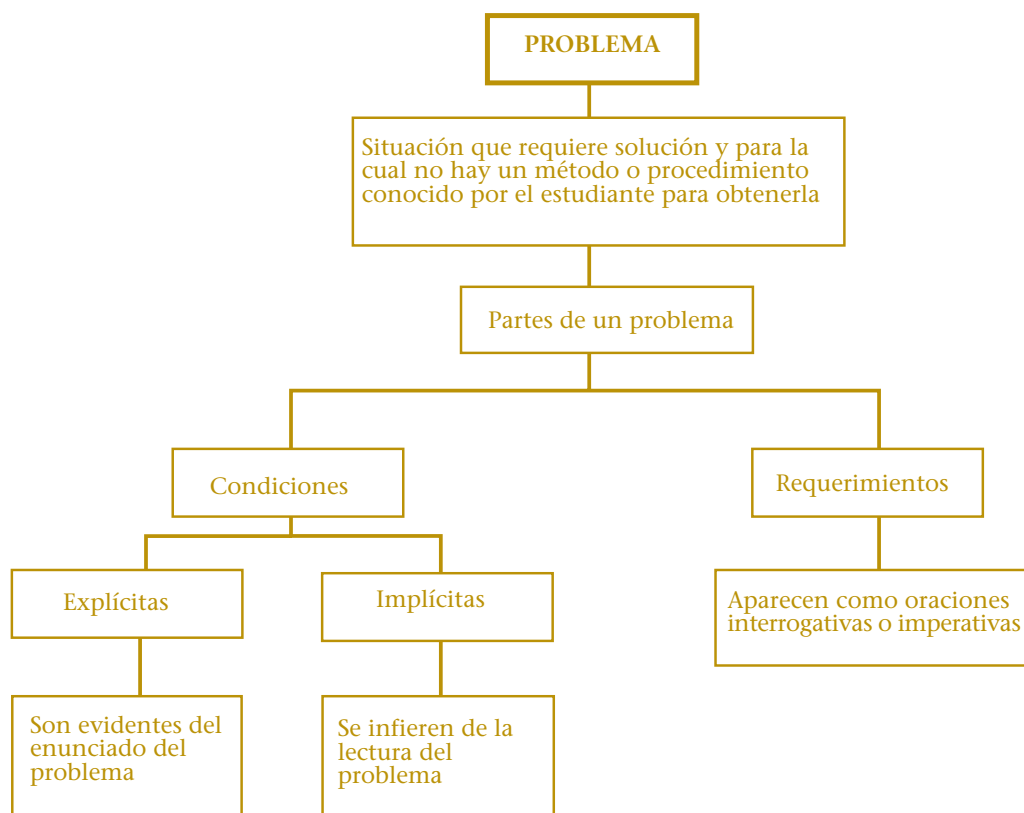
Existen diferentes estrategias para lograr solucionar un problema. La utilización de una en contraposición a otra va a depender del tipo de problema y de la capacidad cognitiva del estudiante que lo enfrenta.

### CLASES DE PROBLEMAS

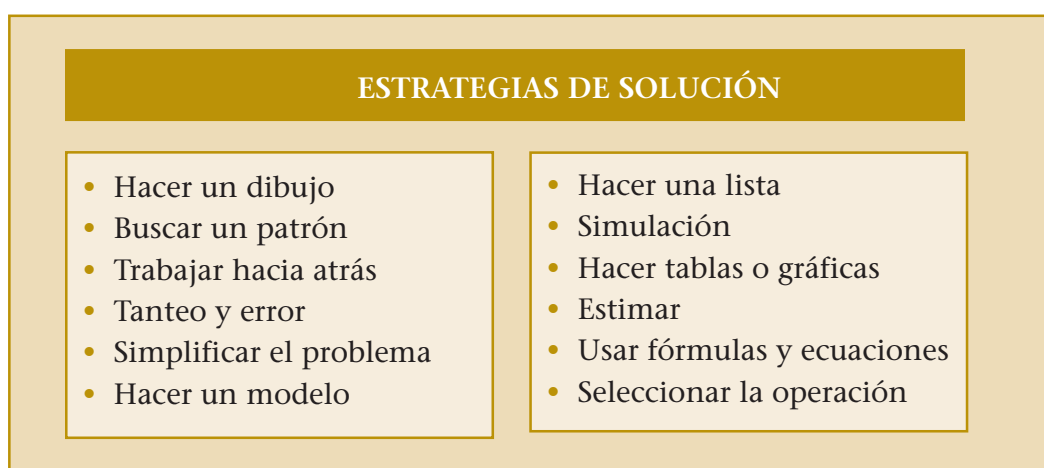
Problema	Ejecución
Encontrar un objeto matemático	Se determina “el objeto”, que puede ser una cantidad, relación, figura, posición, forma y otros. Incluye cálculos algebraicos, geométricos, valores de funciones, etc.
Construir o transformar	Se crean o construyen figuras, expresiones, procedimientos con propiedades conocidas. Se simplifican o cambian de forma expresiones o figuras.
Demostración o explicación	Se someten a prueba (verificación de la validez) ciertas expresiones. Se verifica por qué ocurren ciertos fenómenos o hechos.

El proceso de resolver un problema comienza con el planteamiento de la situación, es decir, sus condiciones y requerimientos; termina cuando la(s) respuesta(s) se ha(n) obtenido y examinado cuidadosamente. Es necesario rebasar la acción inmediata del **resolver** para enfatizar el proceso de solución, sus supuestos, estrategias e implicaciones.

## EL ENFOQUE DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



Preparar a los estudiantes para ser solucionadores efectivos de problemas implica proveerles técnicas variadas de solución. Se sugiere comenzar identificando las mismas hasta que ellos descubran por sí mismos las estrategias adecuadas de solución de un problema en particular.



El maestro debe proveer problemas tanto rutinarios como no rutinarios con el propósito de crear una atmósfera que provoque la curiosidad intelectual, el cuestionamiento y la creatividad del estudiante.

## Estrategias y metodología

Para que los procesos de enseñanza y de aprendizaje estén basados en la teoría cognitiva, hay que utilizar estrategias, métodos y técnicas de acuerdo con este paradigma. Diferentes autores han utilizado las palabras técnicas, método y estrategias de enseñanza para denotar lo mismo (Trowbirdge, et. al. 1981; Carin y Sund, 1985; Collette y Chiapetta, 1986; Montague, 1987; Borich, 1988; Carin y Sund, 1989). El *Diccionario de la Real Academia* define **estrategia** como: a) el arte para dirigir un asunto; b) un proceso regulable; el conjunto de reglas que aseguran una decisión óptima en cada momento. Por otro lado, el **método** es el modo ordenado de proceder para llegar a un fin determinado. La **técnica** es el conjunto de procedimientos de los que se sirve una ciencia o un arte, y la habilidad de hacer uso de ella. Si analizamos con detenimiento estas definiciones nos damos cuenta de que, en educación, las estrategias representan el marco mayor para el proceso de enseñanza. Dentro de las estrategias tenemos los métodos, que representan ese modo ordenado de proceder para lograr el aprendizaje del estudiante; y, dentro de los métodos, las técnicas, que representan los procedimientos para lograr los objetivos específicos; de otro modo, son los medios y formas de que se vale el maestro para obtener el mejor aprendizaje de sus estudiantes.

## Estrategias

### Aprendizaje cooperativo

Los autores Kagan, S. (1994) y Johnson, D. W., Johnson, R. T. y Johnson, E. (1994) han sido promotores de esta estrategia. Existe evidencia en investigación pedagógica de la efectividad de esta estrategia (Ellis, A. K. y Fouts, J. T., 1993; Slavin, R. 1990; Slavin, R., 1991).

Un ambiente cooperativo ayuda a desarrollar el pensamiento matemático e invita a razonar a la vez que provee para el desarrollo de destrezas de solución de problemas.

Los estudiantes aprenden rápidamente que sus estrategias de pensamiento y la habilidad para comunicar sus ideas son más valiosas que encontrar una respuesta correcta. El aprendizaje cooperativo estimula la participación de todos los estudiantes y la comunicación entre ellos, clave para aprender a manipular objetos e instrumentos tecnológicos. Aunque se trabaja con responsabilidad individual, el esfuerzo de uno beneficia a todos. Cuando hay verdadera colaboración, los estudiantes se hacen solidarios, se apoyan y se motivan a aprender.

### Exploración, conceptualización, aplicación (ECA)

Uno de los aspectos más importantes de esta estrategia es la etapa de exploración, en la que el maestro y el estudiante obtienen información de los conocimientos previos que

posee el estudiante, lo que necesita para desarrollar los conceptos adecuadamente y sobre los cuales construir su conocimiento. En esta estrategia se crean las condiciones para que el estudiante desarrolle los conceptos, las destrezas, las actitudes y los valores a partir del estudio contextual de la materia (Villarini y otros, 1988). En la misma, se persigue que el estudiante esté más informado sobre el tema cuando completa una unidad de estudio y que haya modificado sus estructuras cognitivas.

### **Aprendizaje basado en problemas (PBL por sus siglas en inglés)**

Esta estrategia organiza la experiencia de aprendizaje alrededor de la investigación y la solución de problemas controvertibles del mundo real del estudiante. En la estrategia se combinan dos procesos complementarios: la organización del currículo y la estrategia instruccional. Las características esenciales (Torp, L. y Sage, S., 2002) de la estrategia son:

- Involucrar al estudiante como investigador y solucionador de problemas
- Organizar el currículo alrededor de un problema holístico dado, de modo que permita que el estudiante aprenda de un modo relevante y haciendo conexiones
- Crear un ambiente de aprendizaje en el cual los maestros apoyen y fomenten el pensamiento del estudiante, guiándolo durante el proceso de inquirir para que llegue a niveles más profundos del entendimiento

No se debe confundir esta estrategia con el método de solución de problemas. La diferencia fundamental y que los separa es que la estrategia PBL incorpora el currículo de un modo sistemático. De hecho, la visión tradicional del currículo organizado de un modo lineal, ordenado en secuencia, no es apropiada para la implantación de esta estrategia. En ésta, el libro de texto es sólo una referencia al igual que otros materiales, y el currículo se construye y desarrolla alrededor de problemas que los estudiantes tienen que solucionar (Swart, R. J. & Fisher, S. D., 2001).

Cuando se utiliza esta estrategia, hay que ser conscientes de que el orden de desarrollo conceptual, así como el de las destrezas, puede verse afectado. El diseñador de currículo tiene que tomar en consideración qué conceptos y destrezas quiere desarrollar para tenerlos inmersos en el problema o los problemas planteados por los estudiantes.

### **Enseñanza individualizada**

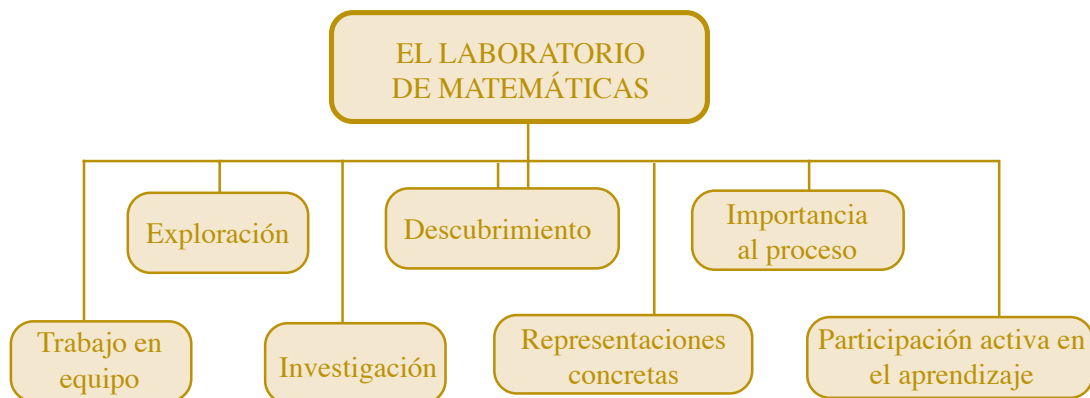
La enseñanza individualizada parte del supuesto de que los estudiantes aprenden a diferentes ritmos un mismo material y lo procesan utilizando mecanismos bajo diferentes condiciones. Esta estrategia pretende proporcionar a cada estudiante un programa de estudio de acuerdo con sus necesidades particulares, ya que considera las diferencias en estilos de aprendizaje, capacidad y ritmo al que se aprende.

La meta fundamental de esta estrategia es adaptar la instrucción para que los aprendices maximicen el aprendizaje. Existen dos estrategias para lograr esto: adaptar la instrucción a las características del estudiante o adaptar la instrucción para que todos los estudiantes logren la tarea. Aunque parezcan similares, estas estrategias son fundamentalmente diferentes. La primera toma en cuenta la naturaleza de la tarea y la del desarrollo conceptual (Jonassen, D. H. y Grabowski, B. L., 1993). Debido a que es casi imposible satisfacer todos los estilos de aprendizaje de los estudiantes, un modo de individualizar la enseñanza es utilizar la segunda opción. El fundamento mayor de esta estrategia estriba en que se ha demostrado que los conceptos necesitan desarrollarse en cierto orden, de modo que pareen la capacidad del estudiante, así como los conocimientos y las destrezas que se derivan de este orden (Jonassen, D. H. y Grabowski, B. L., 1993).

### El laboratorio de matemáticas

La idea fundamental en la estrategia de laboratorio es proveer al estudiante la oportunidad de descubrir y comprender conceptos. En el laboratorio, el estudiante desarrolla su aprendizaje explorando, descubriendo y resolviendo problemas. Se utilizan recursos variados y estrategias que se ajustan a las necesidades y al estilo de aprendizaje del estudiante. Cuando hablamos del laboratorio de matemáticas, nos podemos referir al lugar donde se lleva a cabo un aprendizaje activo; pero, más importante aún, el concepto laboratorio se aplica a los procesos de enseñanza y aprendizaje por los cuales los estudiantes experimentan para descubrir ideas matemáticas. De este modo, el aprendiz logra una actitud de motivación hacia la investigación y el pensamiento.

### LABORATORIO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



La organización del laboratorio o el uso de esta estrategia implica un cambio en el salón de clases y una transformación del rol que desempeña el maestro. La atención ya no está centrada en el maestro; éste se convierte en un facilitador de las experiencias que

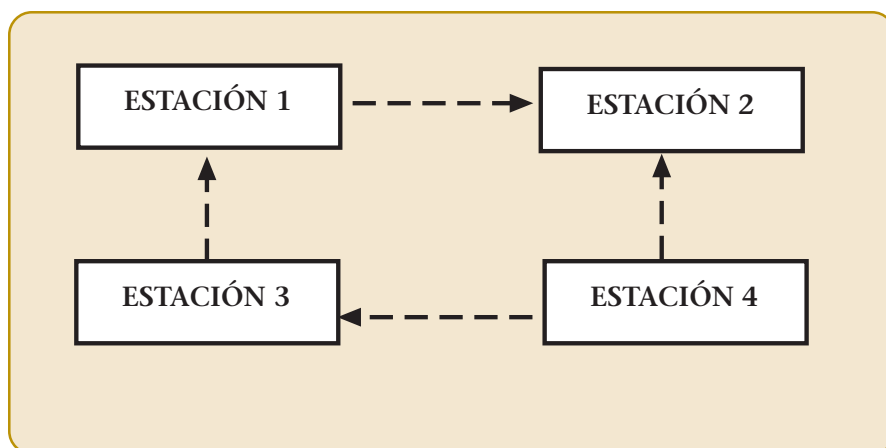


conducen al estudiante a descubrir. En el laboratorio se crea interacción entre estudiante y estudiante, así como entre estudiante y maestro.

El arreglo del salón debe facilitar esa interacción. Uno de los modos de organizar el laboratorio es mediante la organización de áreas de trabajo o estaciones. Cada estación provee al estudiante la oportunidad de realizar una actividad relacionada con el concepto que se está trabajando. En algunas ocasiones, la secuencia de las actividades es importante y en otras no lo es. Cada actividad debe tener instrucciones precisas y proveer materiales suficientes para que cada estudiante participe en la misma.

El estudiante se moverá por diferentes estaciones. Mientras esto ocurre, el maestro se une a diferentes subgrupos en los que tiene la oportunidad de hacer preguntas, aclarar dudas y ayudar al estudiante que lo necesita. Cuando los estudiantes hayan pasado por todas las estaciones, tendrán una sesión de grupo grande en la cual compartirán y evaluarán sus experiencias. Si se organiza adecuadamente, el concepto estación provee una alternativa eficiente para el manejo y la organización del laboratorio.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra cuatro estaciones.



## Metodología

### Método de inquirir o de descubrimiento

El término inquirir se utiliza para cualquier sistema que genera preguntas y requiere respuestas (Sund, R. B.; Trowbridge, L.W., 1973). El método de inquirir es equivalente al método de descubrimiento para algunos autores. Otros piensan que el método de descubrimiento es una parte importante del método de inquirir. Con este método se enfatiza en que el conocimiento se obtiene mediante la investigación y, por ende, está

sujeto a cambio. Implica que el maestro estimula a sus estudiantes a pensar, preguntar, obtener datos, hacer hipótesis, predecir y experimentar (Orlich, D.C., 1989). En términos generales, el método se puede clasificar en tres tipos:

- **Inductivo guiado:** el maestro controla y dirige el proceso; los estudiantes se mueven como un conjunto durante la actividad, y se seleccionan casos específicos.
- **Inductivo no guiado:** los estudiantes seleccionan el fenómeno a estudiar o éste es planteado por el maestro, pero los estudiante someten a prueba sus hipótesis.
- **Deductivo:** se dan las reglas o generalizaciones a los estudiantes y luego se plantea la situación o el problema en que se solicita que encuentren ejemplos de la regla o generalización.

Existen otras taxonomías que aplican sólo al proceso de inquirir (Martin, Hansen, L., 2002). El método de inquirir promueve que los estudiantes descubran las cosas por ellos mismos. Implica encontrar asociaciones o reglas y desarrollar conceptos. Cuando se usa este método, el estudiante aumenta su potencial intelectual, busca recompensa internamente, desarrolla heurística del descubrimiento y aumenta su capacidad de retención.

## Integración de la Tecnología en los Procesos de Enseñanza • • • Aprendizaje

La tecnología es una herramienta esencial para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Esta llegó para quedarse y cada día será más parte integral del salón de clases. La tecnología—incluida la calculadora, las computadoras, los multimedios y el acceso a la superavenida de la información— es una herramienta que permite maximizar la productividad, la comunicación y la capacidad de investigación en la toma de decisión informada (National Educational Technology Standards, NETS, 2003). Permite que el estudiante se involucre de manera activa y la utilice para la búsqueda de información de manera amplia, rápida y actualizada.

Mediante el uso apropiado y pertinente de la tecnología, los estudiantes pueden compartir ideas, recursos y experiencias sin importar las distancias. De igual manera, permite que se realicen experimentos y simulaciones que facilitan que el estudiante construya su propio conocimiento. La tecnología puede contribuir a un aprendizaje más profundo; hace de la experiencia de aprendizaje una activa, entretenida, pertinente y en constante actualización; permite que se individualice de manera óptima; hace que cada individuo con características diferentes tenga experiencias únicas; permite que, desde una perspectiva constructivista, aprenda a utilizarla apropiadamente.

El uso de equipo tecnológico y programado fomenta y apoya de forma efectiva los procesos de enseñanza y aprendizaje. La tecnología permite que los estudiantes:

- Tengan una experiencia multisensorial
- Obtengan información actualizada
- Posean una mayor cantidad de ejemplos y representaciones matemáticas, de tal manera que los estudiantes pueden hacer y explorar conjeturas con mayor facilidad
- Dispongan de simulaciones para crear un aprendizaje activo
- Puedan crear conjeturas, ponerlas a prueba y luego validarlas o descartarlas
- Utilicen la facilidad de cómputos y el uso de herramientas tales como gráficas, modelos, simulaciones y otras
- Manejen una herramienta de productividad accesible a los estudiantes
- Integren matemática y comunicación para que sus ideas adquieran sentido para él y para otros
- Adquieran o desarrollen el fortalecimiento de abstracciones matemáticas
- Integren la investigación matemática y el estudio de las formas geométricas
- Se enfoquen en la toma de decisiones, en la reflexión, en el razonamiento y en la solución de problemas
- Se beneficien de variadas opciones, pues los maestros pueden adoptar la enseñanza para atender a los estudiantes con necesidades especiales.

La tecnología permite que el maestro se convierta en un facilitador eficiente del proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que puede utilizarla para crear ambientes que propicien una educación integrada, llena de recursos actualizados, y pertinentes a sus estudiantes.

### • • • Rol del Maestro

El maestro es el centro del proceso de enseñanza. Es el hacedor de currículo en el sentido práctico del quehacer diario en la sala de clases. Al incorporar las estrategias y metodologías expuestas anteriormente, el maestro debe seguir una filosofía constructivista que lo dirija a lograr la excelencia educativa.

Para alcanzar la excelencia de la enseñanza de matemáticas, el maestro debe convertirse en agente de cambio constructivo. Esto se logra al incorporar nuevos enfoques en sus

prácticas educativas y demostrar su compromiso como educador. Para que el maestro logre estas expectativas y pueda demostrar sus habilidades y capacidades, se han desarrollado los **Estándares Profesionales para los Maestros de Ciencias y Matemáticas de Puerto Rico** (CGE, 1995), que se resumen a continuación.

1. El maestro domina los conceptos, los procesos y las destrezas propias de las matemáticas que enseña.
2. El maestro posee las destrezas básicas de investigación matemática que le permiten ayudar a sus estudiantes a desarrollar éstas efectivamente.
3. El maestro es un comunicador efectivo que facilita el aprendizaje y el uso adecuado del lenguaje matemático en el nivel en que se encuentran sus estudiantes.
4. El maestro conoce a sus estudiantes, los comprende, los respeta y crea un ambiente que propicia el aprendizaje activo, la interacción social y la automotivación.
5. El maestro selecciona y diseña estrategias instruccionales que promuevan el desarrollo de destrezas cognoscitivas simples y complejas.
6. El maestro propicia la integración de conceptos dentro de y entre las ciencias naturales y las matemáticas, a la vez que promueve el desarrollo de conexiones con otras disciplinas y con las experiencias de sus estudiantes.
7. El maestro selecciona, adapta, hace uso de materiales y equipo instruccional y crea sus propios recursos de manera que estimule la exploración, comprensión y aplicación de las matemáticas.
8. El maestro utiliza una fuente variada de recursos instruccionales, como son los recursos humanos y físicos de la comunidad y las experiencias de campo que destacan la pertinencia de las matemáticas en nuestro mundo.
9. El maestro logra interesar a los estudiantes en las matemáticas y lo motiva a participar regular y activamente en las diferentes actividades educativas.
10. El maestro recopila, organiza e interpreta información que facilita la reflexión sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y permite hacer juicio sobre las ejecutorias de éstos.
11. El maestro establece vínculos con los padres o encargados y la comunidad para construir experiencias educativas pertinentes a los estudiantes.
12. El maestro de matemáticas analiza continuamente la efectividad de las experiencias de aprendizaje que provee a sus estudiantes con el propósito de mejorar su práctica educativa.
13. El maestro valora su profesión y se mantiene actualizado en su disciplina y en los nuevos desarrollos educativos.

Los estándares profesionales ayudan a delinear las capacidades que debe poseer el maestro de matemáticas; éstos son:

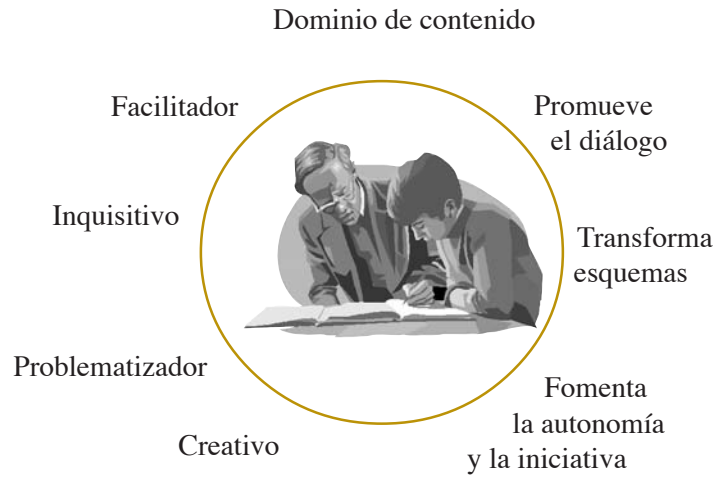
- **Dominio del contenido matemático y su importancia para la vida:** Domina las matemáticas que va a enseñar y tiene un conocimiento más amplio para lograr que el contenido resulte motivador y pertinente a la vida de los estudiantes. Es capaz de establecer conexiones apropiadas entre los temas de la matemática, con otras disciplinas y con las experiencias de los estudiantes.
- **Capacidad para enseñar matemáticas:** Estimula a sus estudiantes a entender, usar y apreciar el significado de los conceptos y procesos matemáticos. Conoce la naturaleza del aprendizaje de las matemáticas y utiliza diferentes estrategias y métodos de evaluación con el propósito de crear un ambiente óptimo que sea retador y atractivo para el aprendiz.
- **Capacidad de mantenerse actualizado:** Asume la responsabilidad de actualizar sus conocimientos, tanto de la disciplina como de las teorías de aprendizaje y los modelos de enseñanza. Se mantiene informado y participa en actividades de crecimiento profesional.
- **Asumir el rol de agente innovador:** El maestro no debe ser un espectador de los cambios en el currículo. Como agente innovador, asume la responsabilidad y tiene la capacidad para generar cambios en la experiencia educativa.

## El maestro desde la perspectiva constructivista

La perspectiva constructivista define el rol del maestro como un facilitador que explora el conocimiento previo de los estudiantes y proporciona el ambiente adecuado para el aprendizaje. Es fundamental que el maestro modele una conducta apropiada, guíe las actividades del estudiante y provea ejemplos variados en vez de utilizar la práctica común de impartir y dirigir (Sparks, 1994).

La enseñanza constructivista, concluye Sparks, es mejor aprendida a través de un desarrollo profesional constructivista. En lugar de recibir conocimiento de los expertos en sesiones de adiestramiento, el personal docente debe colaborar con sus pares, investigadores y hasta con sus propios estudiantes para dar sentido al proceso de enseñanza aprendizaje dentro de sus contextos.

**El maestro constructivista...**



(Vázquez/Negrón, 2000)

Desde la perspectiva constructivista, el desarrollo profesional debe incluir actividades como: la investigación-acción, conversatorios entre pares que viabilicen el intercambio de ideas, estrategias innovadoras, creencias y supuestos relacionados con el proceso de enseñanza y otras. El desarrollo profesional entre pares es un ingrediente necesario en el desarrollo personal (Peterson y Barnes, 1996). Éste resulta de mayor utilidad cuando ocurre en grupos de maestros y por un período extendido de tiempo.

El maestro debe tener amplias oportunidades de construir entendimientos de cómo se enseña y de cómo se aprende (Darling-Hammond, 1996), y de reflexionar junto a otros colegas en torno a su práctica.

---

# EL PROCESO DE EVALUACIÓN Y “ASSESSMENT” EN LA ASIGNATURA

## ••• La Evaluación del Aprendizaje

**E**n el campo de la educación, los términos medición y evaluación se utilizan como sinónimos; sin embargo, aunque ambos términos están relacionados y uno es auxiliar del otro no significan lo mismo. La evaluación se define como un proceso que consiste en obtener información sistemática y objetiva acerca de un fenómeno y en interpretar dicha información a fin de seleccionar entre distintas alternativas de acción (González, L., 1978, Rodríguez, D., 1998).

Por lo general, la evaluación responde a las preguntas siguientes:

- ¿Cómo progresan los estudiantes?
- ¿Cuál técnica de enseñanza resulta efectiva?
- El aprendizaje, ¿tiene secuencia lógica?

La evaluación, vista como un proceso, no debe escaparse del rigor científico que conlleva la búsqueda de información que arroja resultados válidos y confiables sobre el aprendizaje y progreso de los estudiantes (Medina-Verdejo, 2000). Es un proceso integral porque atiende todas las manifestaciones de la conducta del alumno, todos los rasgos de su personalidad y los factores que condicionan unos y otros (Rodríguez, D., 1998).

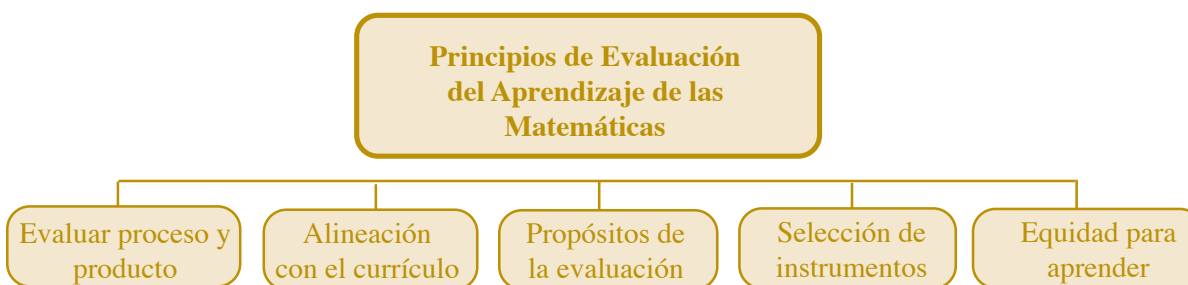
Sin embargo, la evaluación informal que se lleva a cabo diariamente brinda información valiosa sobre cómo aprenden los estudiantes y a qué nivel se encuentran. Esta evaluación incluye la observación, escuchar la conversación de los estudiantes mientras trabajan y cómo responden a las preguntas que se les formula.

Hasta el presente, la evaluación del aprendizaje, guiada por principios técnicos y prácticos, ha sido orientada a la medición de resultados. Esta visión ha cambiado radicalmente para hacer más énfasis en principios educativos. Los dos propósitos principales del proceso de evaluación del aprendizaje son:

- **Determinar los logros en el desarrollo de las competencias y los conocimientos de los estudiantes, de acuerdo con los estándares curriculares definidos para el nivel particular.** Éste ha sido tradicionalmente el propósito de la evaluación del aprendizaje.

- **Mejorar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje, haciendo a los estudiantes y a los maestros conscientes de la naturaleza compleja del aprendizaje que se genera.** Este nuevo propósito se fundamenta en la idea de que la enseñanza y la evaluación no ocurren en secuencia, sino que son componentes de un mismo proceso cuyo propósito es promover el aprendizaje.

Para cumplir con estos propósitos, la evaluación del aprendizaje en matemáticas debe diseñarse e implantarse enmarcada en principios tales como:



- **Es necesario evaluar lo que los estudiantes saben, pueden hacer y comunicar, dando importancia al proceso de construcción del conocimiento:** La evaluación del proceso es fundamentalmente formativa y permite atemperar la enseñanza a las diferencias individuales en los modos de aprender de los estudiantes.
- **Los modos de evaluar deben corresponder a las estrategias de enseñanza:** Una enseñanza activa con énfasis en comunicación no debe ser evaluada, por ejemplo, con pruebas de selección múltiple. Además, la evaluación debe reflejar el contenido y los procesos matemáticos más importantes que los estudiantes deben aprender.
- **Todos los estudiantes deben ser expuestos a un ambiente propicio que provea la oportunidad y el tiempo necesario para aprender matemáticas:** La oportunidad de aprender esta disciplina incluye, además de la libertad para seleccionar los cursos de estudios, la atención a los estilos de aprendizaje de los alumnos.

Es cierto que unos estudiantes aprenden más rápido que otros. Sin embargo, todos pueden aprender esta disciplina si se les provee el tiempo necesario y una instrucción a tono con sus estilos de aprendizaje. Para lograr esto, es necesario conocer el estilo de aprendizaje que les resulta más efectivo a los estudiantes. La enseñanza debe proveer oportunidades para que aprendan de distintos modos.

Este principio, basado en la noción de equidad, requiere que se desarrollen múltiples y variados métodos de enseñanza y evaluación para proveer amplias oportunidades



de aprender y demostrar lo que se ha aprendido. Los maestros deben mantener expectativas altas en la ejecución de los estudiantes.

Los maestros de matemáticas planificarán el proceso de evaluación en armonía con la enseñanza, fomentando un mayor aprendizaje. Más bien, se transformará en una experiencia de descubrimiento y concienciación sobre el conocimiento, las competencias adquiridas y el potencial para continuar aprendiendo.

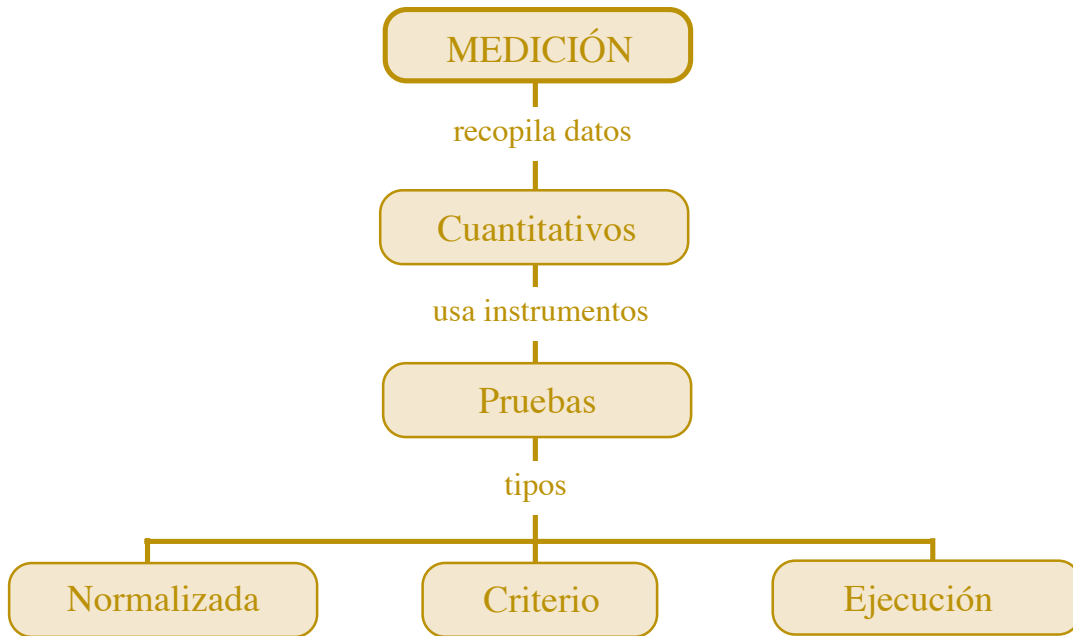
Los maestros definirán una estructura de evaluación en la que seleccionen los métodos adecuados para cumplir los propósitos específicos de la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes. Esta estructura incluye los siguientes pasos:

- **¿Qué evaluar?** Definir el contenido y los procesos matemáticos que son importantes
- **¿Cómo evaluar?** Crear o utilizar instrumentos y seleccionar los métodos o técnicas apropiadas al contenido y los procesos
- **¿Cómo calibrar el proceso y los resultados de la ejecución de los estudiantes?**
- **Informar a los estudiantes cómo se evaluará el proceso y el contenido**
- **Seguimiento que se le dará a los resultados para garantizar la función formativa de la evaluación**
- **Decidir la forma de comunicar los resultados para que sean significativos para los estudiantes, padres y funcionarios escolares.**

La alineación del proceso de evaluación con las metas del currículo contribuirá a que los maestros tengan una percepción general de las potencialidades y competencias de sus estudiantes.

## La medición y el “assessment” en la asignatura

La evaluación incorpora dos procesos, la medición y el “assessment”. El término **medición** puede definirse como el proceso de obtener una expresión numérica de algo, de tal forma que permite realizar comparaciones cuantitativas con un patrón determinado. La razón de la medición es obtener datos para la evaluación. En otras palabras, la medición provee información cuantitativa sobre las características de interés en el sujeto observado. Según Medina-Verdejo (2000), el término medición se relaciona con el proceso de desarrollar instrumentos tales como una prueba de aprovechamiento para administrarla y obtener una puntuación. En resumen, la medición se limita a la descripción cuantitativa de la ejecución del estudiante.



El “assessment”, por su parte, es el proceso de recopilar, organizar, resumir e interpretar información sobre lo que es objeto de análisis con el propósito de facilitar la toma de decisiones y de cursos de acción apropiados. La finalidad de este proceso es proveer información cuantitativa y cualitativa para ayudar a las personas a tomar decisiones.

Específicamente, el “assessment” tiene que verse como una parte integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje ya que está diseñado para documentar el aprendizaje del estudiante (Guskey, T. R., 2003). La información que se obtiene sirve de base para modificar las actividades de aprendizaje y enseñanza (Chappuis, S, & Stiggins, R.J., 2002).



En específico, “assessment” es el proceso de obtener, organizar e interpretar información variada mediante diferentes técnicas sobre lo que aprende el estudiante y cómo lo aprende, con el fin de dirigir la acción correspondiente en el proceso instruccional y mejorar el

aprendizaje de los estudiantes (Medina-Verdejo, 2000). El “assessment” promueve el aprendizaje a través de la retrocomunicación, la reflexión y la autoevaluación. Además, resume e interpreta información sobre lo que el estudiante ha aprendido y es capaz de hacer, con el propósito de tomar decisiones educativas de diversa índole. Entre estas decisiones está el proveer información a los estudiantes y a los padres sobre su progreso, fortalezas y debilidades; juzgar cuán efectiva ha sido la instrucción y lo adecuado del currículo, y recopilar información para fines de demostrar que se cumple con la responsabilidad («accountability») en el ámbito de la escuela, distrito, región o del sistema educativo.



Para lograr estas metas, es necesario recopilar información pertinente, variada y múltiple, de forma tal que permita hacer inferencias sobre el aprendizaje de los estudiantes en matemática.

### Principios éticos que rigen el proceso del “assessment”

La evaluación del aprendizaje se visualiza como un proceso sistemático a través del cual se emiten juicios acerca del aprovechamiento académico del estudiante y de la toma de decisiones relacionadas con éste. Por consiguiente, es indispensable basar las decisiones en un contexto ético (Medina-Verdejo, 2000).

A continuación se señalan los principios éticos que deben enmarcar la gestión del maestro al documentar el aprendizaje del estudiante.

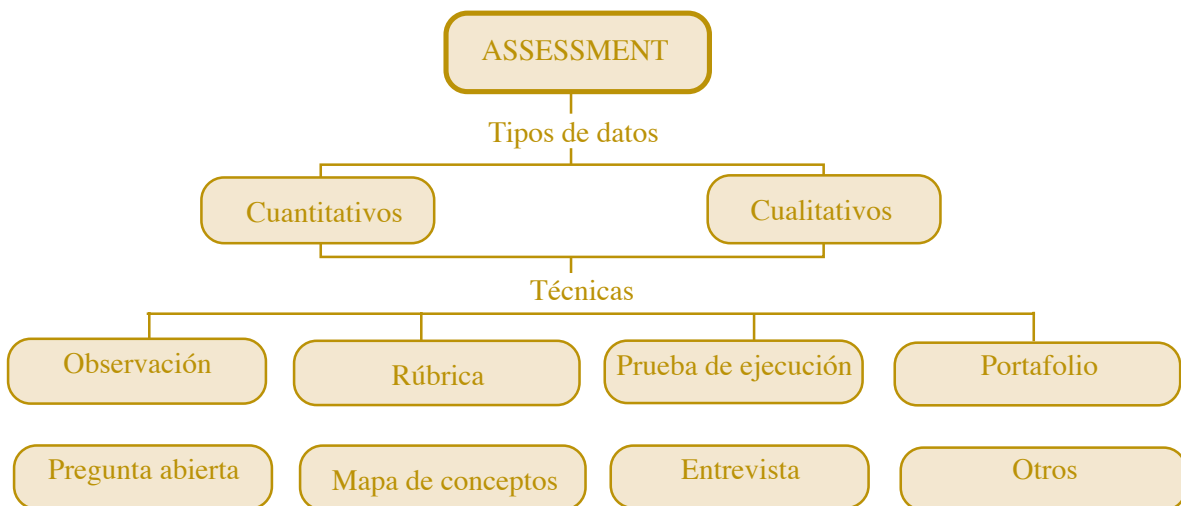
- Provee información a cada estudiante sobre los criterios e instrumentos a utilizarse para evaluar su labor.
- Reconoce y respeta la diversidad de opiniones (estrategias, creatividad, estilos de aprendizaje, etc.).
- Mantiene la confidencialidad de los documentos del estudiante.
- Se convierte en custodio de los documentos del estudiante.

- Es justo al emitir su juicio en torno al trabajo y las acciones del estudiante.
- Provee igualdad de condiciones para llevar a cabo el proceso considerando a los estudiantes con necesidades especiales.

## Técnicas e instrumentos para recopilar información en el proceso de “assessment”

Los exámenes escritos, en formato de ejercicios o selección múltiple, han sido el método de evaluación preferido hasta el presente. La medición tiene su lugar en el proceso de evaluación, pero no es adecuada para recopilar información sobre el **proceso de aprendizaje**, sobre la forma en que los estudiantes se comunican y sobre sus ejecutorias en el trabajo cooperativo. Es necesario incorporar técnicas de “assessment” para documentar el aprendizaje de los estudiantes.

Algunos ejemplos de técnicas de “assessment” se describen brevemente a continuación:



- **Observación:** Es el proceso mediante el cual los maestros observan la ejecución de los estudiantes en la solución de problemas, evalúan su progreso y detectan posibles áreas problemáticas. Aunque en general se realiza en forma intuitiva, debe sistematizarse y registrarse por escrito para ser un método efectivo de evaluación.
- **Pregunta abierta:** Se le formula una pregunta al estudiante y se le solicita que exprese, en forma oral o escrita, el proceso que utilizó para contestar la misma. El nivel de dificultad de la pregunta puede ir desde un ejercicio sencillo de aplicar un algoritmo hasta una situación compleja que requiere la formulación de hipótesis y

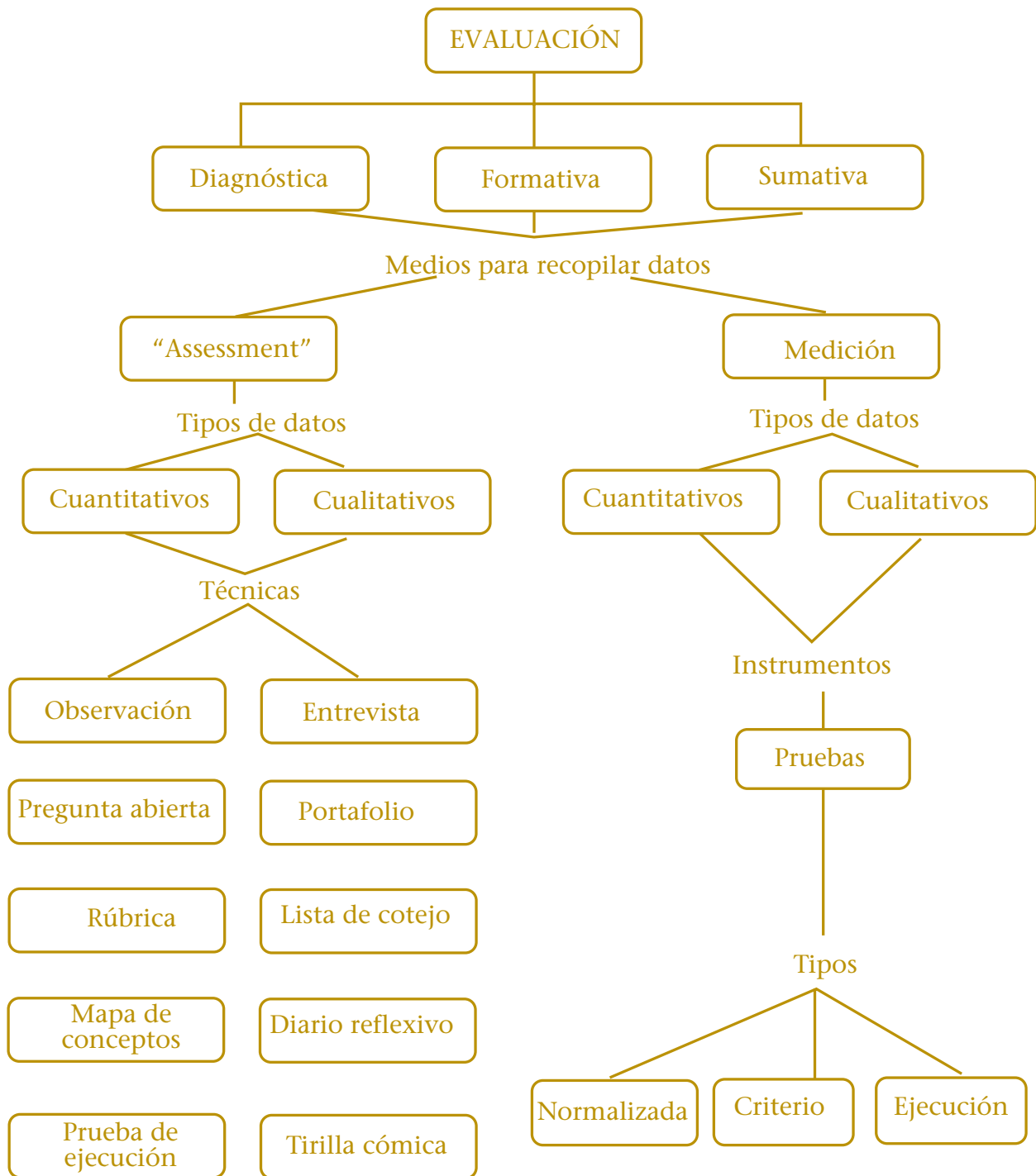
generalizaciones. Dependiendo del nivel de dificultad, se evalúa como respuesta correcta o incorrecta, por medio de claves analíticas o comprensivas. Los maestros deciden la forma en que se evaluará la misma dependiendo de los objetivos instruccionales.

- **Rúbrica:** Es una escala numérica cualitativa que establece criterios y estándares por niveles que permite caracterizar la ejecución del estudiante en una tarea específica mediante una escala numérica.
- **Mapa de conceptos:** Consiste en un diagrama que organiza gráficamente la amplitud de un concepto. Las ideas que se derivan de un concepto se describen en trozos horizontales y verticales. La representación gráfica puede seguir un orden lógico-jerárquico que va de lo más general a lo más específico.
- **Pruebas de ejecución:** En la misma se plantea una tarea, un problema, un proyecto o una investigación, para luego observar y preguntar sobre el proceso. Se puede realizar individualmente o en trabajo cooperativo. La evaluación del proceso y del producto provee información sobre lo que los estudiantes conocen y pueden hacer, así como la forma en que los estudiantes trabajan y resuelven problemas. Por lo general, se corrigen con claves de corrección o rúbricas que pueden ser analíticas o de comprensión. En la clave analítica se estipulan todas las partes que debe tener una respuesta y se asigna una puntuación por cada parte correcta que presenta el estudiante o el grupo. En la clave comprensiva se definen unos niveles de comprensión de la tarea que identifican el nivel de profundidad al que llegaron los estudiantes.
- **Entrevista:** Incluye una secuencia planificada de preguntas y un espacio para la discusión de las mismas entre el maestro y el estudiante. Pueden ser cortas o de mayor duración. Es importante proveer tiempo para que los estudiantes formulen contestaciones bien pensadas. Es una de las mejores formas de evaluar los procesos matemáticos que el estudiante utiliza en la solución de un problema.
- **Portafolio:** Es una colección sistemática y organizada de evidencia usada por los maestros y los estudiantes para mostrar el desarrollo del conocimiento, destrezas y actitudes hacia la matemática. Éste podría incluir: informes, pruebas, metas del estudiante para el curso, autoevaluaciones, proyectos, asignaciones y otros. Se construye a través del tiempo y se evalúa periódicamente.

Estas técnicas se complementan, es decir, se pueden usar combinaciones o variaciones de las mismas. No es preciso usar todas a la vez.

El diagrama que se muestra a continuación recoge y resume en gran medida lo planteado en esta sección. El mismo provee un esquema visual del complejo proceso de evaluación y permite entender de un modo gráfico las conexiones entre las partes.

LA EVALUACIÓN en el PROCESO de ENSEÑANZA y APRENDIZAJE



(Vázquez/Negrón, 2001)



## REFERENCIAS

- Akerman, D. & Perkins, D. N. (1989). Integrated and learning skills across the curriculum. In: Jacobs, H. H. (Ed) *Interdisciplinary Curriculum: Design and Implementation*. Alexandria, Virginia, USA: ASCD.
- Armstrong, T. (1999) *Las inteligencias múltiples en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Manantial.
- Bonilla, N. (1997). *¿Cómo enseñar geometría?* Río Piedras, Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico.
- Borich, G. D. (1988). *Effective teaching methods*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- Bruner, J. S. (1966). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Carey, S. (1985). *Conceptual change in childhood*. Cambridge: MIT Press.
- Carin, A. A. & Sund, R. B. (1989). *Teaching modern science*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- Carin, A. A. & Sund, R. B. (1985). *Teaching science through discovery*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- Carretero, M. (2001). *Constructivismo y educación*. Argentina: Aique.
- Chappuis, S. & Stiggins R. J. (2002). Classroom Assessment for Learning. *Educational Leadership*, 60 (1), 40 – 43.
- Clark, G. (1994). Effective learning and teaching. In T. Craine *Integrated Mathematics*, Teacher Edition. pp. 12-15. Boston MA: Houghton Mifflin.
- Collete, A. T. & Chiappetta, E. L. (1986). *Science instruction in the middle and secondary schools*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- Consejo General de Educación (1994). *Estándares profesionales para maestros de Ciencia y Matemáticas de Puerto Rico*. Río Piedras, UPR: Autor
- Crowly, Mary L. (1987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. *NCTM Year Book*. Virginia, USA: Reston.
- Darling – Hammond, L. (1996). The quiet revolution, rethinking teacher development. *Educational Leadership*, 47 (8), 6 – 12.

- Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Denis, L. (1996). *Pensamiento Geométrico-Niveles de Van Hiele*. Inc., Río Piedras, P.R.: Publicaciones Puertorriqueñas.
- Departamento de Educación, (2000). *Estándares de Excelencia*. Hato Rey, PR: Autor
- Drake, S. M. (1998) *creating integrated curriculum: Proven ways to increase student learning*. Corwin. California: Thousand Oaks.
- Educación, Departamento (1996). *Marco Curricular del Programa de Matemáticas*. Hato Rey, Puerto Rico: Edit DEP.
- Ellis, A. K. & Fouts, J. T. (1993). *Cooperative learning. Research on educational innvations*. USA: The Library of Innvations. Eye on Education.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples, La Teoría en la Práctica*. Barcelona: Paidós.
- González L. (1978). *Análisis e interpretación de la evaluación educativa*. México: Editorial Trillas.
- Guarro Pallás, A. (2000) el currículo democrático e integración curricular. *Cooperación Educativa*, 59 (60), 57 - 60.
- Guskey, T. R. (2003). How classroom assessment improve learning. *Educational Leadership*. 60 (5), 6 – 11.
- Hargreaves, A. Earl, L. & Ryan, J. (1998). *Repensar la educación para los adolescentes*. Barcelona, España: Octaedro.
- Hernández, F. (2000). El currículo integrado: De la ilusión del orden a la realidad del caos. *Cooperación Educativa*, 56 (60), 79 - 85.
- Instituto de Matemáticas (1998) *No hay problema...que no se pueda resolver*. San Juan, Puerto Rico: Departamento de Educación.
- Jacobs, H. (1989). *The growing need for interdisciplinary curriculum content* In Jacobs, H. H. (Ed) *Interdisciplinary curriculum: Desing and implementation*. USA: ASCD.
- Johnson, D.W., Johnson, R.T. & Johnson, E. (1994). *The new circles of learning: Cooperation in the classroom*. Virginia, USA: ASCD.



- Jonasseen, D. H. & Grabowski, B. L. (1993). *Handbook of individual differences: Learning and instructions*. New Jersey, USA: Lawrence Erlbaum Assc. Pub.
- Jonasseen, D. H. (2000). *Computers as mind tools for schools: Engaging critical thinking*. 2nd ed. New Jersey, USA: Merrill.
- Kagan, S. (1994). *Cooperative learning*. California, USA: Resources for Teachers, Inc.
- Kline, M. (1972). *Mathematics thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.
- Lakoff, G. (1987). *Women, fire and dangerous things: What categories reveal about the mind*. Chicago: University of Chicago Press.
- Medina, Verdejo (2000). *Evaluación del aprendizaje estudiantil*. San Juan, Puerto Rico: Editorial Isla Negra.
- Martin, D. J. (1997). *Elementary science methods: A constructivist approach*. Albany, New York, USA: Delmar Publishers.
- Martin-Hansen, L. (2002). Defining inquiry. *The Science Teacher*, 69 (2), 34-37.
- Montague, E. J. (1987). *Fundamentals of secondary classroom instruction*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Virginia, USA: Reston.
- Orlich, D. C. (1989). Science inquiry and the commonplace. *Science and Children*, 26 (6), 22 – 24.
- Piaget, J. (1981). *The psychology of intelligence*. Totowa, NJ: Littlefield, Adams & Co.
- Peterson, P. L. & Barnes, C. (1996) *Learning Together the Challenge of Mathenatics, Equity and Leadership*. Phi Delta Kappa, 77 (7), 485 – 491.
- Rodríguez, D. (1998). *Medición, “assessment” y evaluación del aprovechamiento académico*. Hato Rey, Puerto Rico: Publicaciones Puertorriqueñas, Inc.
- Skinner, B. F. (1974) *About behaviorism*. New York, NY: Alfred Knopf Inc.
- Slavin, R. (1990). Synthesis of research on cooperative learning. *Educational Leardership*, 48 (5), 71-82.
- Slavin, R. (1991). Research on cooperative learning: Consensus and controversy. *Educational Leardership*, 47 (4), 52-54

- Sparks, D. (1994). A Paradigm Shift In Staff Development. *Journal of Staff Development*, pp. 26-29.
- Spicer, J (2001). *Integrated Curriculum: A driving Force In 21st Century Mathematics Education*. Enc focus, 8 (4), 22- 25.
- Stoll, L. & Fink, D. (1999) *Para cambiar nuestras escuelas*. Barcelona, España: Octaedro.
- Sund, R. B. & L.W. Trowbridge. (1973). *Teaching science by inquiry in the secondary school*. Ohio, USA: Bell & Howell.
- Swartz, R. J. & Fisher, S. D. (2001). Teaching Thinking in Science. En A. L. Costa, Ed. *Developing minds: A resource book for teaching thinking*. 3rd ed. Alexandria, Virginia, USA: ASCD.
- Torp, L. & Sage, S. (2002). *problems as possibilities: Problem based learning for K -16 education*. Alexandria, Virginia, USA: ASCD.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model og goal and theory description in mathematics instruction*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishers.
- Trowbridge, L. W., Bybee, R.W. & Sudn, R. B. (1981). *Becoming a secondary school science teacher*. Ohio, USA: Merrill Pub. Co.
- Tye, A. K. (1991) *Global education - form thought to action*. Alexandria, Virginia, USA: ASCD.
- Van H. (1988). The Van Hiele Levels in Geometry. *NCTM Year Book*. Virginia, USA: Reston.
- Villarini, A. R. (1991) *Manual para la enseñanza de destrezas de pensamiento*. San Juan, P.R.: PELL.
- Villarini, A. R. et al. (1988). *La enseñanza orientada al desarrollo del pensamiento*. San Juan, P. R., 62 (7), 28.
- Vigotski, L. S. (1978) *Mind in society*. Cambridge, Massachussets, USA: Harvard University Press.
- Yus, R. (2000). *El marco cultural para un currículo integrado*. Cooperación Educativa, 59 (60), 69-78.

## Recursos del Maestro: Enlaces en el Internet

Illuminations: <http://illuminations.nctm.org/index.html>

Ask ERIC: <http://www.askeric.org/>

Instituto Freudenthal: <http://www.fi.uu.nl/en/>

Mathematics Association of America: <http://www.maa.org/>

Proyecto Orillas: Conectando las Matemáticas a Nuestras Vidas

<http://equity4.clmer.csulb.edu/netshare/gdeklerk/gln/>

<http://www.orillas.org>

iEARN: <http://www.iearn.org/>

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM): <http://www.nctm.org/>

El Paraíso de las Matemáticas: <http://www.matematicas.net/>

DELTA-PI: Desarrollando Destrezas para la Enseñanza de Precálculo

<http://deltapi.cayey.upr.edu/>

Annenberg/CPB <http://www.learner.org>

Eisenhower National Clearinghouse: <http://www.enc.org>

Enchanted Minds: <http://enchantedmind.com/>

Favorite Mathematical Constants

<http://www.mathsoft.com/mathresources/constants/>

Fibonacci Numbers and the Golden Section

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>

Fun Mathematics Lessons: <http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/>

Geometry Step-By-Step from the Land of the Incas

<http://agutie.homestead.com/>

Girl Tech; <http://www.girltech.com>

Girls to the Fourth Power Algebra Program

<http://www.stanford.edu/~meehan/xyz/girls4.html>

Inverse Symbolic Calculator: <http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/>

MathMol: <http://cwis.nyu.edu/pages/mathmol/>

Measure for Measure: <http://www.wolinskyweb.com/measure.htm>

MegaMath: <http://www.c3.lanl.gov/mega-math/welcome.html>

Mrs. Glosser's Math Goodies: <http://www.mathgoodies.com/>

NASA Quest: <http://quest.arc.nasa.gov>

National Center for Education Statistics: <http://nces.ed.gov/>

PBS Science and Technology: <http://www.pbs.org/neighborhoods/science/>

S.O.S. Mathematics: <http://www.sosmath.com/home.html>

Space Educators' Handbook: <http://vesuvius.jsc.nasa.gov/er/seh/>

Surfing the Net with Kids: Fun with Math <http://www.surfnetkids.com/math.htm>

The Abacus: The Art of Calculating with Beads

<http://www.ee.ryerson.ca:8080/~elf/abacus/>

The Discrete Mathematics Project: <http://www.colorado.edu/education/DMP>

The Math Forum: <http://mathforum.org/>

The Explorer: <http://explorer.scrtec.org/explorer/>

The Nine Planets: <http://www.seds.org/nineplanets/nineplanets/>

The Prime Page: <http://www.utm.edu/research/primes/>

The Virtual Museum of Computing

<http://vlmp.museophile.com/computing.html>

Virtual Polyhedra: <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html>

## APÉNDICE A

# DESARROLLO HISTÓRICO

El Programa de Matemáticas ha desarrollado diferentes enfoques para guiar la enseñanza de las matemáticas en Puerto Rico durante las últimas décadas. A continuación se resumen los esfuerzos de revisión y renovación curricular desde comienzos del siglo XX.

### ÉNFASIS DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DESARROLLO HISTÓRICO (SIGLO XX)

1900 1910 1920 1930	Énfasis en la enseñanza de conceptos y destrezas de aritmética
1940 1950	Énfasis en el valor puramente social de la matemática
1960	Énfasis en la significación para facilitar la comprensión y el entendimiento de las matemáticas (matemática moderna)
1970	Énfasis en el desarrollo de destrezas básicas fundamentales
1980	Énfasis en la solución de problemas pertinentes y en el desarrollo del pensamiento
1990 en adelante	Énfasis en la solución de problemas, el desarrollo de destrezas de razonamiento y pensamiento crítico

### • • • Primeras Tres Décadas (1900 – 1930)

A principios de la dominación norteamericana (1899) se estableció en Puerto Rico una Junta Insular de Educación, con el propósito de centralizar la administración escolar de la Isla. Durante estas décadas se enriqueció el currículo y se realizaron cambios metodológicos en todas las materias.

La enseñanza de las matemáticas, así como las otras materias, se impartía en el idioma inglés. El texto para enseñar matemáticas se titulaba *Arithmetic*, de Wentworth y Smith. El énfasis, evidentemente, era la enseñanza de conocimientos y destrezas en aritmética.

La Comisión de la Universidad de Columbia realizó un estudio en 1925, cuyos resultados revelaron que los estudiantes puertorriqueños dominaban muy bien la aritmética. Según el estudio, esto se debía al énfasis en la práctica y el tiempo excesivo que se dedicaba a esa asignatura.

### • • • Décadas de los 40 y 50

La Comisión de la Universidad de Columbia que estudió el sistema educativo en 1949 no ofreció pruebas de aprovechamiento; pero, al estudiar el currículo de matemáticas en la escuela intermedia, encontró que en los cursos que se estaban desarrollando se seguían fielmente y con mucha rigidez los libros de texto. Para corregir este problema, se sugirió que se utilizaran con mayor frecuencia actividades relacionadas con la comunidad.

Las recomendaciones de la Comisión en 1949 recogían las tendencias en boga para aquella época, sobre el valor puramente social de las matemáticas. Esto motivó que los señores Erasto Rivera Tosado y Pedro A. Cebollero publicaran un texto de matemáticas en español con el título *Aritmética Social*. Este texto se utilizó durante la década de los 50 e iba dirigido al nivel elemental.

### • • • Década de los 60

Sin descartar la utilidad social de las matemáticas, se hicieron cambios significativos en el enfoque de la asignatura, su terminología, su simbolismo y sus usos, de modo que se enfatizara la significación para facilitar la comprensión y el entendimiento de los procesos matemáticos. A este nuevo enfoque se le llamó matemática moderna.

Para responder a las necesidades del nuevo enfoque, surgió un interés por mejorar la enseñanza de matemáticas y por aumentar el número de especialistas en la materia. Con

aportaciones de fundaciones norteamericanas, se creó en los Estados Unidos el llamado “School Mathematics Study Group” (SMSG). Este grupo estaba integrado por maestros de matemáticas, matemáticos, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El grupo produjo textos para los diferentes niveles escolares. De éstos, la escuela puertorriqueña utilizó, al comienzo de la década de los 60, los producidos para los niveles intermedio y superior. Los materiales preparados por el SMSG servían de modelo a las casas editoras de libros en la preparación de textos. Ejemplos de esto son dos series de matemática moderna en español, que se comenzaron a usar en 1966-67 con los estudiantes de tercer a sexto grado.

Los Centros de Currículo, establecidos en el año escolar 1963-64 en San Juan, Ponce y Mayagüez, tenían el propósito de facilitar el ensayo de los materiales curriculares en la escuela elemental y, al mismo tiempo, ofrecer orientación a los maestros, sobre contenido, estructura y enfoques didácticos. También se produjeron cuadernos para los grados primero y segundo, con la correspondiente guía para el maestro, los cuales se comenzaron a usar en el año escolar 1966-67. Para finales de los 60 se destacaron las diferencias individuales en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Desde el 1966 se comenzó a atender a los estudiantes talentosos mediante la creación de escuelas de áreas, como el Centro Residencial de Oportunidades Educativas de Mayagüez (CROEM) y mediante el ofrecimiento de cursos avanzados en el nivel superior.

En el año 1967-68, la Comisión de Matemáticas del “Collage Entrance Examination Board” elaboró un curso de álgebra y trigonometría de nivel universitario para el programa de Nivel Avanzado de Matemáticas. En el año escolar de 1968-69, se iniciaron los cursos de Probabilidad y Estadísticas, y el de Geometría Analítica. En ese mismo año se estableció en toda la Isla el primer curso de Álgebra para estudiantes de noveno grado de talento superior y promedio, así como para los estudiantes talentosos de octavo grado.

### • • • Década de los 70

Con la matemática moderna, y su consecuente énfasis en la significación, se exageró la utilización de los medios. Éstos se confundieron con los fines de la enseñanza de la materia, al extremo de descuidarse el desarrollo de las destrezas básicas fundamentales. El bajo aprovechamiento mostrado por los estudiantes en exámenes estandarizados y exámenes del “Collage Board”, los costos cada vez más altos de la educación y la demanda por evidenciar la calidad de la enseñanza, entre otras razones, provocaron un movimiento en la nación norteamericana al cual se le llamó “Back to Basics”.

En el año 1973-74, el Programa de Matemáticas produjo un currículo remedial, con énfasis en el desarrollo de destrezas básicas, para estudiantes con limitaciones en el aprendizaje de matemáticas de nivel elemental. Durante ese año, se inició el Proyecto Calendario Escolar Continuo (Quinmestres). El currículo de nivel secundario, diseñado

para este proyecto, proveía para atender las diferencias individuales con énfasis en el desarrollo de destrezas básicas.

Este currículo se inició con una muestra de seis escuelas, luego extendió su uso a toda la Isla en el año escolar 1979-80. Para seguir el mismo enfoque y fortalecer las destrezas matemáticas que se desarrollan en el nivel elemental, se diseñó el currículo del primer nivel (primer a tercer grado) en veinte etapas de aprendizaje. En los grados cuarto a sexto, se inició el uso de una serie de libros que sustituyeron los libros de la serie matemática moderna.

En el año escolar 1974-75, el Programa de Matemáticas estableció las competencias mínimas para cada nivel de enseñanza en las cuales se basa el diseño de las pruebas de aprovechamiento preparadas a nivel central.

### • • • Década de los 80

Estudios realizados a fines de la década de los 70 revelaron el riesgo de que un estudiante llegara a obtener un dominio mecánico de las destrezas básicas, sin entenderlas o estar capacitado para utilizarlas sabiamente. Es fundamental que el estudiante desarrolle destrezas de solución de problemas que lo capaciten para analizar y resolver situaciones nuevas que se le presenten. Para responder a esta necesidad, el Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) declaró que la solución de problemas debía ser el énfasis de la enseñanza de matemáticas para la década de los 80.

Durante esta década se desarrolló en Puerto Rico un proceso de revisión curricular intenso que impactó todas las disciplinas. Los últimos años se caracterizan por una intensa actividad de pensamiento y acción con el fin de promover una reforma educativa profunda y exitosa. Basándose en la experiencia de proyectos de reforma en décadas anteriores, el sistema público de enseñanza inició un proceso de reflexión intenso que unió esfuerzos del sector público y privado, de escuelas y universidades, de empresas y del gobierno. En el 1985, se inicia formalmente una nueva revisión del contenido curricular de las disciplinas académicas en nuestro sistema de Educación Pública. Tres principios integradores del currículo sirvieron de criterios guías para el inicio de esta revisión, a saber:

- La pertinencia de la educación: la continuidad y reconstrucción de la experiencia
- El desarrollo de destrezas de pensamiento y del pensamiento crítico
- El desarrollo de los valores de dignidad y solidaridad.

Se estableció consenso sobre la importancia y el valor fundamental de estos principios en el desarrollo de los currículos escolares. La mayor parte de la actividad curricular, hasta entrada la década de los 90, se orientó en torno a estos tres principios, que aún son centrales para el desarrollo de nuevos currículos.



### ... Década de los 90 en Adelante

El movimiento reformista en Puerto Rico cobra mayor impulso debido a proyectos, tales como: Puerto Rico Statewide Systemic Initiative (PRSSI), los Centros Regionales para la Instrucción Matemática (CRAIM), los Laboratorios para la enseñanza de las Matemáticas (LABMAT 7), Metas 2000, Instituto 2000, “School to work” y otros. Otra fuente de motivación para la reforma de la enseñanza de las matemáticas proviene del Concilio Nacional de Maestros de Matemática (conocido por sus siglas en inglés NCTM). Esta organización de profesionales de la educación matemática en Estados Unidos publicó en 1989 un documento titulado “Estándares para el Currículo y Evaluación en Matemáticas”. Luego de muchos años de estudio y reflexión, este documento describe las aspiraciones fundamentales de la educación matemática y define lo que los estudiantes deben conocer y poder hacer en cada nivel escolar.

El documento de los estándares se divulgó ampliamente en Puerto Rico, y el Consejo General de Educación diseñó una versión puertorriqueña para el 1996. El mismo sirvió como base para crear el primer Marco Curricular del Programa de Matemáticas. En el año 2000, la NCTM publica el documento “Principals and Standards for School Mathematics”, una versión actualizada del primer documento. Éste da origen al documento Estándares 2000 de Puerto Rico”, vigente en nuestro sistema educativo.

El contenido de este Marco se ha nutrido de las ideas y sugerencias de ambos documentos de estándares, así como de las ideas recogidas en la literatura sobre educación matemática de otros países. También ha sido muy valiosa la experiencia local en el desarrollo de currículos de matemáticas a través de los años.

### ... Resumen de la Visión de la Enseñanza de las Matemáticas

Esta visión de la enseñanza de la matemática escolar se traduce en cambios fundamentales hacia lo que ocurre en el salón de clases. La primera columna, ENSEÑANZA TRADICIONAL, recoge los elementos que deben recibir menos atención en el salón de clases. La segunda columna, VISIÓN DESEADA, recoge los elementos que deben recibir mayor atención en el salón de clases.

ENSEÑANZA TRADICIONAL	VISIÓN DESEADA
<p>El estudio de las matemáticas se dirige primordialmente a preparar estudiantes para continuar estudios universitarios.</p>	<p>Literacia científica y matemática para todos los estudiantes. Se provee la oportunidad para que los estudiantes profundicen, amplíen su conocimiento y obtengan el máximo provecho de su potencial. Se diversifica la oferta para que todos desarrollen sus talentos. De esta forma, los que están interesados en ingresar a un centro universitario estarán preparados para continuar estudios exitosamente.</p>
<p>La educación se basa en el libro de texto con énfasis en ejercicios rutinarios.</p>	<p>La educación parte de la experiencia directa con el contexto social, el uso de materiales concretos y los recursos tecnológicos para promover la profundidad del conocimiento.</p>
<p>El aprendizaje es individual.</p>	<p>El aprendizaje es individual, interactivo y cooperativo.</p>
<p>Se enfatiza la memorización de datos y el dominio de las destrezas algorítmicas.</p>	<p>Se enfatiza el desarrollo de destrezas cognoscitivas de alto nivel (solución de problemas, análisis, síntesis, evaluación y formación de juicios) y la profundidad del entendimiento.</p>
<p>Los temas de las matemáticas se presentan relativamente aislados unos de otros. No se enfatizan las conexiones con otras disciplinas.</p>	<p>Se enfatizan las conexiones entre temas de la misma disciplina y con otras disciplinas.</p>
<p>Se enfatiza el razonamiento convergente, las respuestas exactas y la asimilación pasiva del conocimiento en un ambiente altamente controlado.</p>	<p>Se promueve el razonamiento divergente, respuestas diferentes y creativas, así como el aprendizaje activo.</p>
<p>Se intenta cubrir todos los temas del texto y se les dedica poco tiempo para su desarrollo.</p>	<p>Se establece un contenido medular que promueve mayor profundidad en los conceptos de las matemáticas.</p>

ENSEÑANZA TRADICIONAL	VISIÓN DESEADA
Se presentan los conceptos en forma abstracta.	Se promueve el aprendizaje en espiral, de lo concreto y fenomenológico a lo abstracto, mediante un enfoque constructivista.
Se enseñan los conceptos independientemente de su aplicación.	Se hace énfasis en la pertinencia de los temas estudiados y su relación con eventos de la vida real.
La evaluación del aprendizaje se basa en los resultados de pruebas que miden primordialmente la retención de datos.	La evaluación es auténtica; además de pruebas tradicionales, se usan múltiples y variadas formas de recoger información sobre el aprendizaje del estudiante.
El rol primordial de los maestros es servir como transmisores de información y procurar que los estudiantes sean capaces de reproducirla.	El maestro se convierte en un facilitador del aprendizaje. Estructura las experiencias que los estudiantes van a tener para que lleguen a sus propias conclusiones.
El aprendizaje se limita al salón de clase.	El aprendizaje se extiende al hogar y a la comunidad e incorpora el estudio de los problemas sociales, los valores y la forma en que la disciplina puede ayudar a resolver los mismos.



## APÉNDICE B

# USO DE CALCULADORAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

El siglo XXI presenta grandes retos a nuestros estudiantes. Además de las disciplinas académicas tradicionales, los expone a nuevos avances tecnológicos que facilitarán sus vidas, si tienen el conocimiento de cómo enfrentarlos. Por supuesto, la escuela no debe estar ajena a esta realidad; por el contrario, su meta fundamental es proveer la educación necesaria para comprender la tecnología emergente y aprender a usarla. En este aspecto, Puerto Rico está en una posición competitiva ante los demás países del mundo. En la actualidad, los niños de corta edad ya saben cómo operar juegos electrónicos algunos de relativa dificultad. Antes de llegar a la escuela, muchos de ellos ya conocen cómo prender, activar un programa y usar una computadora. Se debe aprovechar el interés que muestran los estudiantes por esta tecnología, de modo que se cumpla al mismo tiempo con los objetivos pedagógicos. Lograremos así formar ciudadanos capaces de integrarse a esta sociedad del nuevo milenio, tan sofisticada y en la que se requiere dominio de la cibernética.

La utilización de calculadoras puede extender la comprensión de las matemáticas y exponer a los estudiantes a experiencias fructíferas de solución de problemas. Podrán resolver problemas reales que incorporan operaciones de mayor complejidad que tomarían demasiado tiempo resolver con lápiz y papel. De esta forma, se concentran más en el razonamiento y en las estrategias para resolver problemas. Las investigaciones (Dunham y Dick, 1994; Hembree y Dessart, 1992) indican que la utilización de las calculadoras en el salón de clases puede aumentar el aprovechamiento académico y mejorar la actitud hacia las matemáticas. Se reconoce, además, el papel importante que puede tener la calculadora en el desarrollo de conceptos, destrezas y procesos matemáticos. De igual manera en que la calculadora es integrada al proceso de enseñanza y aprendizaje en la clase de matemáticas, debe integrarse en el proceso de “assessment” y evaluación del estudiante.

El Programa de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico recomienda la integración de calculadoras en el currículo de matemáticas en todos los niveles. Todos los estudiantes deben tener acceso a calculadoras apropiadas a su nivel educativo, de igual forma que están presentes en su diario vivir.

## • • • Recomendaciones Específicas del Programa de Matemáticas

El Programa de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico utilizó como punto de partida para la redacción de este documento las recomendaciones del Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) vertidas en su 1998-99 Handbook: NCTM Goals, Leaders and Position Statements, el Marco Curricular del Programa de Matemáticas (1997) y los Estándares del Programa de Matemáticas (1996). Además recomienda:

- Incorporar el uso de la calculadora como herramienta de trabajo en todos los niveles para:
  - Desarrollo y refuerzo de destrezas
  - Exploración de ideas y conceptos matemáticos
  - Resolución de problemas
  - Elaboración de cálculos matemáticos largos y tediosos.
- Promover el uso apropiado de la calculadora para mejorar la práctica pedagógica mediante:
  - El modelaje de aplicaciones
  - La integración del “assessment” y la evaluación
  - La actualización sobre los adelantos más recientes en el campo de la tecnología
  - La evaluación del potencial de nuevas aplicaciones para promover el estudio y el aprendizaje de las matemáticas.
- Orientar a estudiantes, padres, administradores, miembros del Consejo Escolar y otros miembros activos de la comunidad, sobre los resultados de las investigaciones que documentan las ventajas de incluir las calculadoras como una de varias herramientas requeridas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas
- Concienciar a quienes tienen a su cargo la selección de materiales curriculares sobre la forma en que la tecnología y, en particular las calculadoras, han causado cambios en el currículo de matemáticas
- Apoyar los Centros de Desarrollo Profesional y los núcleos escolares, de manera que continúen proveyendo actividades para expandir la comprensión y aplicación de la tecnología de la calculadora
- Colaborar para que las instituciones universitarias desarrollen y provean programas de estudio y preservicio que incorporen las calculadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje

- Estimular a los autores y a las casas editoriales de instrumentos de evaluación y “assessment”, para que incorporen en sus trabajos aquellas aplicaciones en las que se utilicen las calculadoras.

El Programa de Matemáticas también se suscribe a las siguientes observaciones incluidas en la sección del Principio de Tecnología de los Estándares 2000 del Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas (1998):

- Como cualquier otra herramienta, los instrumentos tecnológicos pueden utilizarse de un modo efectivo o pobre. No deben utilizarse como reemplazos para el conocimiento básico; en su lugar, deben usarse para promover intuiciones y conocimientos. En los programas de matemáticas, la tecnología debe usarse responsablemente con la meta de enriquecer las experiencias de aprendizaje de nuestros estudiantes. (p. 40)
- Las investigaciones afirman el impacto positivo del uso de calculadoras en el desarrollo de estrategias de solución de problemas y en la ejecución. Sin embargo, el tener acceso a este instrumento no reemplaza la necesidad de que los estudiantes aprendan y dominen las destrezas básicas de la aritmética, el desarrollo de métodos efectivos de solucionar problemas aritméticos con multidígitos y la habilidad para ejecutar manipulaciones algebraicas, tales como resolver ecuaciones lineales y simplificar expresiones. Los estudiantes deben aprender a tomar decisiones sensatas en lo referente a cuándo usar la calculadora. (p. 43)
- Los maestros tienen la responsabilidad de tomar decisiones apropiadas en torno a los contextos particulares en que se usarán las calculadoras, a base de cuán efectiva es esta herramienta en desarrollar el tema matemático en cuestión. (p. 43)

### ••• La Utilización de la Calculadora en el Nivel I: Grados K-3

La nueva visión de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de kindergarten a tercer grado recomienda el uso de recursos tecnológicos para promover la profundidad del conocimiento. Es necesario que los maestros conviertan el salón de clases en un centro de aprendizaje, en el cual se utilicen nuevas técnicas y estrategias que incluyan el uso de la tecnología.

De acuerdo con los Estándares de Excelencia de Matemáticas, una de las áreas de énfasis en los grados primarios es desarrollar en los estudiantes la habilidad para utilizar estrategias y herramientas computacionales. Se recomienda que, entre los mismos, se incluya el uso de la calculadora. Es importante que desde sus inicios en la escuela participen en experiencias o actividades en las que se relacionen con los usos y funciones del teclado. En el apéndice de este documento se presenta una actividad que se puede utilizar para este propósito.

En este nivel, se deben desarrollar los diferentes conceptos mediante experiencias concretas. El uso de la calculadora debe ser posterior a estas experiencias. Se recomienda utilizar calculadoras básicas que sean fáciles de manejar para los estudiantes.

La calculadora tiene diversas aplicaciones para el desarrollo de los conceptos y destrezas matemáticas. En esta sección se incluyen algunos temas (organizados por concepto fundamental) en los cuales se puede integrar el uso de la calculadora.

## Numeración y operaciones

- Desarrollar el sentido numérico
- Desarrollar el sentido operacional
- Determinar el valor y lugar posicional
- Determinar orden y secuencia
- Descubrir y aplicar las propiedades conmutativa y asociativa
- Investigar relaciones entre los números
- Contar de dos en dos, de tres en tres, etc.
- Explorar estrategias de estimación

### Patrones

- Descubrir e identificar patrones numéricos
- Utilizar patrones para representar y resolver problemas

Es necesario que el maestro entienda que la calculadora no va a sustituir la memorización de las combinaciones básicas, ya que éstas son fundamentales cuando los estudiantes realizan cálculos mentales y estimaciones. Sin embargo, según se enfrenten a situaciones en que los cálculos sean más complejos, se debe utilizar la calculadora en la solución de problemas. De esta forma se concentrarán en el proceso de razonamiento que los llevará a resolver el problema.

## ••• La Utilización de la Calculadora en el Nivel II: Grados 4-6

En el Nivel II, se extiende la comprensión de los números cardinales a las fracciones y los decimales. Se continúa ampliando el conocimiento de sistemas de medidas, conceptos geométricos, gráficas, estadísticas y probabilidad. También se establecen las bases para el estudio del álgebra.

En los grados cuarto a sexto, los estudiantes utilizan la calculadora para explorar, descubrir y desarrollar conceptos matemáticos. En este nivel se recomienda una calculadora que incluya fracciones. A continuación se incluyen algunos temas (organizados por concepto fundamental) en los cuales se puede integrar el uso de la calculadora.

## Numeración

- Entender, representar y utilizar números en diversas formas equivalentes (cardinales, fracciones, decimales y por cientos)
- Explorar y comprender las relaciones y equivalentes entre números decimales y fracciones
- Entender y aplicar los conceptos de razón y proporción en situaciones de la vida diaria
- Comparar y redondear números cardinales, decimales y fracciones
- Explorar relaciones entre números negativos y positivos

## Operaciones

- Realizar cálculos tediosos con números cardinales, decimales y fracciones
- Desarrollar, analizar y explicar los procesos computacionales y las diversas técnicas de estimación
- Utilizar la calculadora para resolver problemas que contengan cálculos complejos de la vida diaria

## Medición

- Comparar y estimar unidades del sistema métrico e inglés en situaciones del diario vivir

## Relación

- Descubrir, extender, analizar y crear una variedad de patrones
- Hallar la solución de problemas en los cuales sea necesario buscar, usar y representar patrones
- Determinar equivalencia entre los números de los diferentes conjuntos numéricos



## Estadística y probabilidad

- Hallar, analizar y comprender medidas de tendencia central como media aritmética, mediana y moda en situaciones de la vida diaria
- Explorar el concepto de probabilidad y determinar la probabilidad de ocurrencia de eventos simples

### • • • La Utilización de la Calculadora en el Nivel III: Grados 7-9

La meta del currículo de matemáticas en el nivel intermedio es construir una base matemática sólida para el nivel superior. Durante este período, muchos estudiantes formarán concepciones sobre ellos mismos como aprendices de las matemáticas, sobre su interés, su actitud y sus motivaciones. Estas concepciones influenciarán su enfoque en el estudio de las matemáticas de la escuela superior, lo que a la vez influenciará en sus oportunidades en la vida (NCTM, 1998, p. 211).

En este nivel, se recomienda la utilización de una calculadora científica que incluya fracciones o una calculadora gráfica. A continuación se presentan temas (organizados por concepto fundamental) en las que se puede integrar la calculadora de fracciones y la calculadora gráfica en el currículo de matemáticas del nivel intermedio. Las recomendaciones que sólo se pueden llevar a cabo con la calculadora gráfica estarán identificadas con un asterisco (\*) al comienzo de la descripción.

## Numeración

- Redondear números
- Trabajar con notación exponencial
- Cambiar de fracciones a decimales y viceversa
- Simplificar fracciones
- Hacer conversión de fracción impropia a número mixto y viceversa
- Determinar la raíz cuadrada
- Hallar la factorización prima de números grandes
- Verificar el valor absoluto de un número
- Hallar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo

## Operaciones

- Ordenar operaciones con números cardinales, fraccionarios, decimales y enteros
- Estimar operaciones con diferentes conjuntos de números
- Calcular operaciones con precisión y rapidez
- Aplicar las destrezas de cálculos y estimación en la solución de problemas
- Verificar e interpretar resultados

## Estadística y probabilidad

- Obtener las medidas de tendencia central de un conjunto de datos
- Construir gráficas de un conjunto de datos
- Construir diagramas de dispersión de un conjunto de datos

## Relaciones

- Explorar y descubrir relaciones y patrones
- Sustituir valores en una igualdad para encontrar la solución
- Evaluar expresiones algebraicas
- Simplificar términos semejantes
- Localizar puntos en un sistema de coordenadas cartesianas

## Geometría

- Dibujar círculos y líneas
- Dibujar figuras en un plano de coordenadas
- Dibujar traslaciones, rotaciones y reflexiones de figuras geométricas

### ••• La Utilización de la Calculadora en el Nivel IV: Grados 10-12

La meta del currículo de matemáticas en el nivel superior es preparar a los estudiantes para proseguir estudios postsecundarios o para ingresar en el mundo del trabajo. En este nivel, se profundiza en el estudio formal del sistema de los números reales, números complejos, matrices, funciones, análisis de datos, probabilidad y geometría.

En el nivel superior, el estudiante podrá utilizar la calculadora para explorar nuevas áreas de las matemáticas, producir, desarrollar y reforzar conceptos y destrezas matemáticas, simplificar y agilizar los cálculos, visualizar y simular situaciones. El uso efectivo de la calculadora transformará el salón de clases en un laboratorio donde el estudiante pueda investigar y experimentar con ideas matemáticas.

En el nivel superior se recomienda que se utilice la calculadora gráfica. A continuación se incluyen algunos temas (organizados por concepto fundamental) en los cuales se puede integrar el uso de la calculadora.

## Numeración

- Determinar la densidad de los números reales
- Identificar características de los números reales y complejos

## Operaciones

- Efectuar operaciones con los números cardinales, fracciones, decimales, enteros, reales (rationales e irracionales) y complejos
- Llevar a cabo operaciones con potencias

## Geometría

- Usar razones trigonométricas para resolver problemas en triángulo rectángulo
- Trazar y analizar gráficas que utilicen transformaciones trigonométricas y figuras geométricas
- Interpretar y dibujar objetos bidimensionales y tridimensionales
- Desarrollar el sentido espacial

## Medición

- Calcular el área de polígonos
- Calcular el volumen de poliedros y sólidos de revolución

## Relación

- Resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, con valor absoluto, trigonométricas, con radicales, exponenciales y logarítmicas

- Determinar la pendiente, los interceptos, los ceros de una función, la simetría de una función, el intervalo donde una función es decreciente, constante, par, impar y cóncava hacia arriba o hacia abajo y correspondencia 1-1
- Determinar el inverso de una función, verificar identidades trigonométricas y resolver problemas que requieren conocimientos de trigonometría
- Establecer conexiones entre funciones, trigonometría, coordenadas polares y números complejos
- Trabajar y analizar funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
- Resolver ecuaciones lineales, cuadráticas, con valor absoluto, trigonométricas, con radicales, exponenciales y logarítmicas
- Desarrollar y analizar algoritmos
- Resolver desigualdades lineales y no lineales
- Trazar gráficas
- Analizar sucesiones y series
- Calcular determinantes
- Resolver ecuaciones lineales con determinantes o matrices

### **Estadística y probabilidad**

- Construir, analizar, hacer inferencias y predicciones basadas en tablas y gráficas
- Usar simulaciones para estimar probabilidades
- Calcular combinaciones y permutaciones
- Calcular la probabilidad experimental y teórica para modelar y resolver situaciones

---

● ● ●

## APÉNDICE C

### MODELO DE VAN HIELE

¿Cómo se aprende geometría? ¿Cómo se desarrolla el pensamiento geométrico? Estas interrogantes motivaron a dos educadores holandeses, preocupados por la ejecución de sus estudiantes en geometría, a desarrollar una teoría que explicara cómo ayudarlos a pensar sobre los problemas relacionados con esta disciplina.

Aprender geometría no es recodar nombres y datos; es utilizar las ideas activamente para entender el mundo que nos rodea y para resolver problemas. Esto requiere que el maestro sea un facilitador del pensamiento creativo que provoque en el estudiante el deseo de aprender.

Dina y Pierre Van Hiele (1959) establecieron un modelo de cinco (5) niveles por los cuales deben pasar los estudiantes en el proceso de aprendizaje de la geometría. De acuerdo con el modelo, si un maestro o un libro presenta una idea a un nivel más elevado del cual está el alumno, esto le imposibilitará entender la tarea. Los esposos Van Hiele presentaron evidencia de que el desarrollo de las ideas geométricas crece en progresión por medio de una jerarquía de niveles. Primero, los estudiantes aprenden a reconocer formas por su apariencia general y después a analizar las propiedades que las distinguen. Posteriormente, visualizan las relaciones entre figuras y hacen deducciones simples.

Los esposos Van Hiele insistían en que el progreso del estudiante a través de los niveles depende en gran parte de la enseñanza que recibe el estudiante. Para que un estudiante progrese de un nivel a otro dentro de un mismo tópico, los Van Hiele propusieron una secuencia de cinco fases en el proceso de enseñanza. A continuación se presenta una descripción de los niveles.

#### ● ● ● Nivel 0: Visualización

En este nivel el estudiante percibe las figuras holísticamente; en otras palabras, reconoce como un todo y no necesariamente reconoce sus propiedades o las relaciones entre las partes de las figuras.

Por ejemplo:

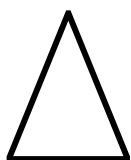


Figura # 1



Figura # 2

El estudiante puede identificar la figura #1 como un triángulo porque se parece a un triángulo y no por otra razón. También puede que la figura # 2 no la identifique como un triángulo porque no se parece a su idea del mismo.

### • • • Nivel 1: Análisis

En este nivel el estudiante puede analizar las figuras de acuerdo con sus partes. Descubre sus propiedades por medio de actividades de experimentación tales como medición, dibujos y trabajo con modelos entre otras. Comienza a utilizar el lenguaje que describe una figura y reconoce las relaciones entre sus partes.

Aun en este nivel el estudiante no puede deducir algunas propiedades que son necesarias para definir una figura. Tampoco percibe las relaciones entre diferentes figuras.

### • • • Nivel 2: Deducción Informal o Abstracción

En este nivel el estudiante entiende las relaciones entre figuras. También establece relaciones entre las propiedades de figuras diferentes. Esto le permite deducir propiedades de una figura y reconocer clasificaciones. Podrá entender las relaciones entre las figuras; sin embargo, aún no podrá realizar demostraciones.

### • • • Nivel 3: Deducción Formal

El estudiante es capaz de construir demostraciones utilizando postulados, axiomas, definiciones y teoremas. Produce y elabora enunciados en una secuencia lógica, justificando cada paso para llegar a una conclusión como consecuencia de una información dada. Generalmente, este nivel se puede alcanzar en el curso de geometría de la escuela superior.

### • • • Nivel 4: Rigor Matemático

El estudiante razona formalmente sin referirse a modelos concretos. El producto de este razonamiento es el establecimiento, elaboración y comparación de sistemas axiomáticos de la geometría. Éste es el nivel más alto en el pensamiento geométrico y se alcanza a un nivel de profundidad equivalente al que alcanzan los matemáticos.



# HOJA DE EVALUACIÓN DEL DOCUMENTO

## MARCO CURRICULAR

A ti, maestro:

Solicitamos tu colaboración para evaluar este Manual. Contesta las preguntas según la escala que se indica a continuación. Confiamos en tu participación ya que es muy importante para la revisión del currículo del Programa de Matemáticas.

- I. Evalúa y contesta las siguientes preguntas haciendo uso de la escala numérica que se provee a continuación:

5 .....EXCELENTE

4 .....BUENO

3 .....SATISFACTORIO

2 .....DEFICIENTE

1 .....POBRE

Características del Documento	5	4	3	2	1
Provee una visión clara.					
Es de fácil manejo.					
Provee información de utilidad para el maestro.					
La redacción es clara, sencilla y precisa.					
Las diferentes secciones están organizadas en secuencia lógica.					
Cada sección provee información que permite al maestro tener una idea clara y precisa de:					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La visión y misión</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El alcance y uso del documento</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• La epistemología</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los objetivos generales del aprendizaje</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los procesos de enseñanza y aprendizaje</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El proceso de “assessment”</li> </ul>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Las técnicas de “assessment” .</li> </ul>					
Provee información en torno al desarrollo de la materia como disciplina a través del tiempo.					
La bibliografía incluida provee amplios marcos de referencia.					



